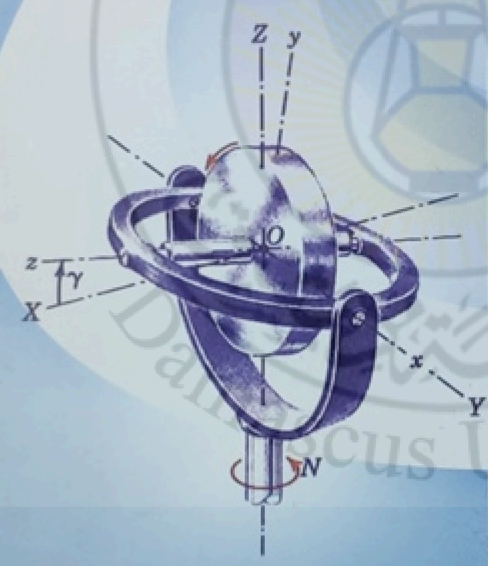


منشورات جامعة دمشق
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية

الميكانيك الهندسي
علم الحركة



الدكتور إسكندر عمجة
أستاذ في قسم هندسة الميكانيك العام

الدكتور معن الحوراني
أستاذ في قسم هندسة
ميكانيك الصناعات النسيجية وتقاناتها

الدكتور جمعة شحادة
أستاذ مساعد في قسم هندسة
السيارات والآليات الثقيلة

الدكتور أيمن الخباز
مدرس في قسم هندسة الميكانيك العام

الدكتور حسين حمزة
مدرس في قسم هندسة الميكانيك العام

الدكتور سلطي اليوسف
مدرس في قسم هندسة التصميم الميكانيكي

١٤٣٤ - ١٤٣٥ هـ
٢٠١٣ - ٢٠١٤ م

جامعة دمشق



الميكانيك الهندسي – علم الحركة

السنة: الأولى

القسم: هندسة الميكانيك العام

هندسة التصميم الميكانيكي

هندسة السيارات والآليات الثقيلة

هندسة ميكانيك الصناعات النسيجية وتقاناتها

منشورات جامعة دمشق
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية
جامعة دمشق



الميكانيك الهندسي
علم الحركة

الدكتور إسكندر عمجة
أستاذ في قسم هندسة الميكانيك العام

الدكتور معن الحوراني
أستاذ في قسم هندسة ميكانيك الصناعات النسيجية وتقاناتها

الدكتور جمعة شحادة
استاذ مساعد في قسم هندسة السيارات والآليات الثقيلة

الدكتور أيمن الخباز
مدرس في قسم هندسة الميكانيك العام

الدكتور حسين حمزة
مدرس في قسم هندسة الميكانيك العام

الدكتور سلطي اليوسف
مدرس في قسم هندسة التصميم الميكانيكي

1433-1434 هـ
جامعة دمشق
2013-2014 م


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

CONTENT **الفهرس**

NTRODUCTION **مقدمة**

Preface **تمهيد**

الفصل الأول

Curvilinear motion of particles الحركة المنحنية لجسيم مادي

الفصل الثاني

بعض الحالات الخاصة لحركة الجسيم المادي

Some Special Cases of a Particle Motion

الفصل الثالث

Kinematics of a Rigid Body **حركة الجسم الصلب**

Translation Motion of a Rigid Body **الحركة الانسحابية**

Rotation Motion of a Rigid Body **الحركة الدورانية**

الفصل الرابع

الحركة المستوية العامة للجسم الصلب *General Plane Motion of a Rigid Body*

الفصل الخامس

الحركة الدورانية للجسم الصلب حول نقطة ثابتة
Rotational Motion of a Rigid Body about a Fixed Point

الحالة العامة لحركة الجسم الصلب الحر *Independent Rigid Body Motion*

الفصل السادس

الحركة المركبة لجسيم مادي ***Resultant Motion of a Particle***

الفصل السابع

الحركة المحصلة للجسم الصلب ***Resultant Motion of a Rigid Body***

مقدمة ***INTRODUTION***

إن لمقرر الميكانيك الهندسي منزلة خاصة بين العلوم الأساسية، ويُعتمد عليه كثيراً للانتقال إلى العلوم الهندسية الأخرى؛ لذا فهو يشكل حلقة رئيسة في خطة تأهيل المهندسين الميكانيكيين، وركيزة أساسية يعتمدون عليها في دروب العمل الهندسي المبدع، وقد اصطلح على تسميته الميكانيك الهندسي؛ تمييزاً له من الميكانيك النظري، والميكانيك التطبيقي، فهو شيء بينهما، أو أنه منهما معاً.

إن هذا المقرر مخصص أساساً لطلبة كلية الهندسة والمعاهد الصناعية العليا، والكتاب الحالي في علم الحركة يمثل الجزء الأوسط من البرنامج الكلي للميكانيك الهندسي، وهو مقرر لطلبة السنة الأولى في كلية الهندسة الميكانيكية، ويفترض أن الجزء الأول منه علم التوازن، قد أعطي لطلاب السنة الأولى.

بعد ممارستنا للتدريس، أردنا القيام بوضع كتاب في علم الحركة يتفق مع المستوى العالي، بل يزيد على ذلك الذي تم تقديمه في الماضي، ولا عجب فإنه يحتوي على مجموعة من المسائل التي أعدت حديثاً، ولقد راعينا قبل كل شيء عند اختيار مادته وعرضها، أن يكون المنهاج كاملاً، يعطي صوراً وافية عن طرق الميكانيك الأساسية اللازمة للمهندس في مجالات هذا العلم، وأن يكون للطلاب معيناً في دراستهم الجامعية، ومصدراً عربياً يضاف إلى المصادر الأخرى باللغات الأجنبية، كما راعينا أيضاً إمكانية استخدام الكتاب عند دراسة موضوع الميكانيك؛ سواء أكان في برنامج مختصر أم موسع.

لقد انطلقنا عند وضع الكتاب من اعتقادنا العميق؛ الذي أكدته مراجع عديدة من البرامج التعليمية، بشرح أركان علم الحركة ضمن سبعة فصول، وضعت بطريقة منهجية لا تعدم التسلسل والترابط، وبأسلوب متميز لا ينأى عن الاستقلالية والرصانة، فبدأنا الكتاب بدراسة حركة الجسيم المادي، ثم حركة الجسم الصلب، ليتمكن الطالب من فهم المادة واستيعابها بسهولة أكثر، مما يجعل عملية الدراسة أكثر وضوحاً ومنطقية.

وقد استخدمنا في هذا الكتاب طريقة المتجهات الشائعة إلى جانب الطريقة التحليلية؛ نظراً لأهميتها في دقة دلالاتها للتفسيرات الفيزيائية والهندسية، ولما لها من مميزات عديدة في الوقت الحاضر، وأفردنا جزءاً كبيراً منه للأمثلة والمسائل المحلولة بما يزيد على مئة مسألة، وللأمثلة والمسائل غير المحلولة بما يزيد على مئة مسألة أيضاً، بمراعاتنا عند اختيارها ضرورة توضيح الظواهر الميكانيكية، ودراسة الأنواع الأساسية من المسائل، وحلها بكل طريقة من الطرائق المشروحة في الكتاب، وتحتوي حلول المسائل على إرشادات وملاحظات لمساعدة الطلاب عند دراستهم دون معلم، وعلى تجاوز الصعوبات التي يواجهونها في تطبيق المعلومات النظرية على مسائل هندسية، ولتخطي الفاصل بين مجرد الإلمام بالمبادئ العامة، وبين القدرة على تطبيقها في المسائل الواقعية، وذلك هو الهدف الحقيقي للتعليم الهندسي.

لقد بذلنا الجهد في هذا الكتاب للابتعاد عن مجرد الترجمة والنقل عن المصادر الأجنبية إلى الاختيار والانتقاء، محاولين أخذ أفضل ما في كتب الميكانيك الهندسي المعروفة، فجاء الكتاب وافياً بالغرض إلى حد كبير؛ حيث يمكن عَدَّه مرجعاً مفيداً للمهندس العربي.

لقد تم حل المسائل بوحدات مجموعة القياس العالمية ***SI*** ، واستعمال الرموز الفيزيائية المصطلح عليها دولياً. كما حاولنا عند اختيار المصطلحات الهندسية والعلمية العربية استعمال الدارج والمألوف في سورية، ونعتقد أنه لابد من المحاولة الجدية لتوحيد هذه المصطلحات، لأن انتشار النهضة العربية العلمية سيبقى بطيئاً من دونها، وقد جمعنا عدداً من الرموز التقنية الواردة في هذا الكتاب بعد معجم المصطلحات العلمية مباشرة.

إن الطبعة الثانية من هذا الكتاب، تتفق مع المستوى العالي، بل يزيد على ذلك الذي قدم في الماضي، ومع ذلك قد يجد الدارس كلمات لا يرى أن محلها فيه، وقد يفتقد إلى كلمات كان يفضل أن يراها فيه، مما لا يمكن تجنبه من المؤلفين حتى لو حرصوا على ذلك، ومع ذلك فإننا نرجو أن يكون هذا الكتاب خطوة تتلوها خطوات أفضل، ومهما كانت الكتب الجامعية العربية في حالتها الراهنة، فإن المصلحة العامة تقتضي دعمها وتشجيعها، ولا مناص من إزالة القيود التي تحد منها، وتشل حركتها.

نرجو أن يكون لهذا الكتاب الفائدة المرجوة من وضعه، ومرشداً للطالب في دراسته، وعوناً للمهندس الممارس في البحث والإنتاج، وأن يتم تطويره في المستقبل إلى مرجع أكبر وأوفى في الميكانيك الهندسي. آملين أن نكون قد قدمنا بعملنا هذا خدمة لوطننا في مجال العلم، وأن يكون هذا الكتاب رافداً للعاملين من أبنائه في مجال الثقافة والتقدم الحضاري، فإن استطعنا تحقيق هذه الغاية فذلك رجاؤنا.

نريد في ختام هذه المقدمة أن نرفع جزيل شكرنا إلى وزارة التعليم العالي؛ لمجهودها الطيب في تشجيع الأساتذة على تأليف الكتب؛ التي نحن أحوج ما نكون إليها، كخطوة أولى في مضمار مسيرة وطننا في درب الحضارة والعلم، حتى يتبوأ المكانة التي تليق به بين دول المعرفة والعلم والحضارة.

دمشق   كانون الأول - 2012

د.سلطي اليوسف   د حسين حمزة   د. أيمن الخباز

د جمعة شحادة   أ.د. معن الحوراني   أ.د. إسكندر عمجة

تمهيد Preface

نعلم أن الكون في حالة حركة دائبة، وما من جسم ساكن في هذا الكون، فكثير من الأجسام تتحرك على سطح الأرض التي تدور حول محورها الهندسي، وتنتقل حول الشمس في مدار مثلها العديد من كواكب المجموعة الشمسية، وهذه الكواكب تتحرك بين عدد كبير من النجوم المتحركة في الفضاء.

وهذه الحركة للأجسام الكبيرة مثل الأرض والشمس والكواكب والنجوم، لها مثيل في أدق أجزاء المادة وهو الذرة، فهذا الجزء يموج بالحركة، وكثير من الظواهر مثل الكهرباء والضوء والحرارة، أثبت العلم أنها صور مختلفة من صور الحركة.

إذن كيف تنشأ الحركة التي هي الحياة نفسها؟ هذا السؤال هو موضوع بحث علم الحركة أو ما نطلق عليه علم الميكانيكا أو علم الميكانيك.

وعموماً تنشأ الحركة من تغيير المادة، بصورها المختلفة، مكانُها أو موضَعها في لحظات زمنية مختلفة، وعلى ذلك فالمادة والمكان والزمان هم عناصر الحركة، ولا يمكن فصل هذه العناصر عن الآخرين، والسكون الذي نلاحظه للأجسام ما هو إلا سكون نسبي، ومثالاً على ذلك ثبات أو اتزان المنشآت على سطح الأرض، وهو سكون هذه المنشآت بالنسبة للأرض التي هي في حالة حركة مستمرة حول الشمس كما ذكرنا.

1- علم الميكانيكا *Mechanics*

أو ما يطلق عليه علم الميكانيك الذي ينقسم من ناحية نوع المادة إلى:

- ميكانيك المرونة واللدونة *Mechanics of Elasticity and Plasticity*

الذي يبحث في مرونة الجسم وقابليته لتغيير شكله وأبعاده عند تعرضه لمؤثرات خارجية، وعودته إلى شكله الأصلي بعد زوالها. كما يبحث في لدونة الجسم وقابليته لتغيير شكله وأبعاده عند تعرضه لمؤثرات خارجية، وعدم عودته إلى شكله الأصلي بعد زوالها.

- ميكانيك الموائع *Mechanics of Fluid*

وتنقسم بدورها إلى:

§ ميكانيك السوائل *Hydro-Mechanics*

§ ديناميك الغازات *Gas-Dynamics*

- ميكانيك الجسيمات والأجسام المتماسكة

Mechanics of Particles and Rigid Bodies

وتنقسم بوجه عام إلى فرعين أساسيين وهما:

§ الاستاتيك *Statics*

أو ما يطلق عليه علم السكون الذي يبحث في الدراسات العامة للقوى، وشروط اتزان الأجسام المادية؛ التي تؤثر عليها القوة الثابتة بالقيمة والاتجاه بالنسبة للزمن، ويخدم هذا الفرع من العلم الإنشاء الهندسي على وجه العموم.

§ الديناميك *Dynamics*

أو ما يطلق عليه علم التحريك، الذي يبحث في وصف الحركة ودراسة مقوماتها، ويهتم بمسببات الحركة، وهي القوى المطبقة على الأجسام المادية المتحركة، والشروط الابتدائية لها لحظة تأثير القوى عليها، لتثبيت المفاهيم والعلاقات الحركية الأساسية، ولذلك تنقسم بدورها قسمين:

- الكينماتيك *kinematics*

أو ما يطلق عليه علم الحركة المجردة، الذي يبحث في الخواص الهندسية لحركة الأجسام المادية، ويهتم بوصف الحركة وصفاً مجرداً، دون الاهتمام بكتلتها أو تأثير القوى عليها، أي يدرس حركة الأجسام دون دراسة مسبباتها.

- الكينيتيك *Kinetics*

أو ما يطلق عليه علم التحرك، الذي يبحث في تكييف القوى للحركة، بربط فعل القوى المطبقة على الأجسام بحركتها الناتجة عن هذه القوى، أي يدرس حركة الأجسام مع مسبباتها.

2- علم الحركة *Kinematics*

يُعَدُّ علم الحركة جزءاً من علم الميكانيك؛ الذي يدرس حركة الأجسام المادية من وجهة نظر هندسية؛ لإيجاد العلاقة بين المكان والزمان بالنسبة للأجسام الأخرى، أي: أنه يقوم بدراسة المظاهر الخارجية للحركة، بتعبير رياضي خاص يشتمل على بعض العناصر التفاضلية، التي لها صلة وثيقة بالشكل الهندسي للمسار، الذي يسير عليه المتحرك بدلالة جملة مقارنة مفروضة يمكن أن تكون متحركة أو ثابتة، ويتضمن هذا التعريف مفهومين أساسيين، مفهوم الجملة المتماسكة أي الجسم الصلب ومفهوم الزمن.

فإذا أردنا التحقق من أن جُسيماً ما هو في حالة حركة، وجب أن ندرس المسافات التي تفصل بين هذا الجسيم وجملة مقارنة نفترضها ثابتة كالأرض، أو أجسام صلبة أخرى متصلة معها، ولا يحق لنا عَدُّ الجسم صلباً، وبالتالي صالحاً لأن يكون جملة مقارنة إلا إذا تألف من مجموعة من الجسيمات تبقى المسافات الفاصلة بينها ثابتة، ولا يمكننا التأكد من ثبات هذه الأبعاد النسبية إلا بواسطة أجهزة قياس تتصف هي نفسها بثبات الطول، أي: بواسطة أجسام صلبة، فنحن إذاً أمام دائرة مفرغة إذ لا يمكن التحقق من صلابة الجسم إلا بجسم صلب آخر، لذا عُدَّ مفهوم الجسم الصلب مفهوماً أولياً، واتخذ أساساً لبناء الميكانيك النيوتني، أو الكلاسيكي، أي التقليدي (*Classical Mechanics*).

وبما أن الحركة نسبية؛ بمعنى أن ظاهرة الحركة تختلف بحسب الجملة المقارنة المتخذة أساساً لدراسة هذه الحركة، لذا وجب أن نحدد دوماً الجملة المقارنة التي ترد إليها الحركة، وبحدوث الحركة يحدث تحول في المسافة بين الجسم المتحرك ونقط الجملة المتماسكة، ونكون بذلك قد أدخلنا مفهوماً جديداً هو الزمن، لان مفهوم تحول المسافة لا يمكن توضيحه إلا بمفهوم تحول الزمن.

ولكن كيف نستطيع قياس الزمن في حالة عدم وجود حركة؟ لو كان الكون دون حراك فمن أين نقتبس مفهوم الزمن ونصنع الأجهزة التي تقيسه! فلا زمن دون حركة، ولا حركة دون زمن، فالزمن هو مثل المسافة مفهوم أولي.

وتنحصر مسائل علم الحركة في تعيين جميع مميزات الحركة التي تميز حركة الجسم ككل، أو حركة كل جسيم من جسيماته على انفراد من مسار وسرعة خطية وتسارع خطي في مختلف الأزمنة؛ بمعرفة معادلة حركته.

والميكانيك التقليدي الذي نُدَرِّسه الآن في مدارسنا الثانوية وجامعاتنا، يرجع إلى علَمين من أعلام القرن السابع عشر هما العالم غاليليو غاليلي (*Galileo Galilee*) (1642-1564) الذي يُعَدُّ مؤسساً لهذا العلم، وقد عمل أستاذاً في جامعة بيزا، حيث قام بدراسة متقنة للأجسام في حالة السقوط الحر، ولحركتها على مستوٍ مائل أملس، وحركة النواس، وكان له الفضل الأكبر في إيجاد التقريب العلمي للمسائل الفيزيائية، وهو الذي رفض الفكرة الخاطئة التي كانت سائدة في تلك الأيام والتي تقول أن سرعة السقوط الحر للأجسام الثقيلة أكبر من سرعة سقوط الأجسام الخفيفة، والعالم إسحاق نيوتن (*Isaac Newton*) (1727-1642) الذي عمل أستاذاً في جامعة كمبردج، مسترشداً بالأعمال التي قام بها غاليلي من وضع الصيغ الدقيقة لعلم الحركة، أي: الأساسات الصحيحة لعلم التحريك.

ولقد أدى هذا العلم خدمات جليلة للأبحاث الهندسية، وباستخدام مفاهيمه في مجال التطبيقات الهندسية كان له قيمة عملية مستقلة، إذ ساعد في حل كثير من مسائل الإنشاء الهندسي خاصة عند دراسة انتقال الحركة في الآلات عبر التركيبات الآلية المكونة لها، ولهذا السبب وتحت تأثير متطلبات تطور صناعة الآلات دفع بعض العلماء إلى إطلاق اسم الهندسة الحركية على علم الحركة وإنشاء قسم مستقل في علم الميكانيك لدراسة الحركة.

ولقد خطا علم الميكانيك التقليدي خطوة كبيرة بإدخال النظرية النسبية (*Theory of Relativity*) التي أعلنها ألبير أينشتاين (*Albert Einstein*) (1879-1953) في عام (1905)، وبها وضعت البشرية يدها على منبع هائل للطاقة تلك هي الطاقة الذرية، كما نشط البحث فيما يسمى بالميكانيك الكمي (*Quantum Mechanics*) والميكانيك الموجي (*Wave Mechanics*) لتفسير بعض الظواهر الطبيعية التي عجز علم الميكانيك التقليدي عن تفسيرها.

3- المفاهيم الأساسية ***Basic Concepts***

يعتمد الميكانيك التقليدي على المفاهيم الأساسية اللازمة لدراسة علم الحركة، فالمكان والزمان والجسم الصلب هم عناصر علم الحركة

3-1- مفهوم الفراغ ***Concept of Space***

عندما ندرس حركة أو سكون جسم أو جسيم، فإنه يجب تعيين وضعه اللحظي بالنسبة لفراغ معين، فحركة الأجسام تجري في الفراغ مع مرور الزمن، والفراغ من الناحية الهندسية هو المجال المعين الذي يحوي الجسم الذي ندرسه.

وسنستخدم كلمة الفراغ هنا للرجوع إلى فراغ إقليدس، وهو فراغ الأبعاد الثلاثة المألوفة وهي الطول والعرض والارتفاع (*Dimensional Space*)، ويفرض فيه ثبات المسافات بين نقطه المختلفة، وعدم تغيرها بوجود المادة أو حصول الحركة فيه.

بالتالي يتعين الفراغ بمجموعة من الإحداثيات القائمة المباشرة، والتي يعبر عنها بالمحاور الإحداثية X , Y , Z التي نتجت من تقاطع المستويات الإحداثية، ويرمز للفراغ بـــ $T(OXYZ)$ حيث O هي نقطة مشتركة بين المستويات والمحاور الإحداثية.

وعند دراسة حركة الجسيم المادي على طول خط مستقيم أو على مستوى، فإنهما تُعدّان كحادثتين في فراغ ذي بعد أو بعدين، وتقاس المسافات بمقاييس معينة ومتفق عليها كالمتر مثلاً.

3-2- مفهوم الزمن *Concept of Time*

الزمن هو قياس تتابع الحوادث، ويعرف في أشهر القواميس على أنه فترة، وتعرف الفترة بأنها زمن، وذلك يبدو غير مفيد، وربما كان ينبغي القول إن الزمن هو ما يحدث عندما لا يحدث أي شي آخر.

ليس المهم تعريف الزمن، ولكن كيف نستطيع قياسه، فالزمن العياري المتفق عليه عالمياً هو الثانية النجمية، وهو مقتبس من حركة دوران الأرض في الكون، أي: بالنسبة لجملة مقارنة ثابتة؛ بدلالة الكون.

وتقضي إحدى الطرق لقياس الزمن استخدام وسيلة لها صفة دورية متكررة بانتظام، كساعة الحائط ذات النواس، إذ واحدة الزمن هي الثانية النجمية، وهي الفترة الزمنية التي يحتاجها نواس يقوم بـــ (3600) دورة في الساعة ليقوم بنوسة واحدة، وبما أن اليوم يساوي (24) ساعة، وهو الزمن اللازم لمرورين متتاليين لنجم معين فوق خط طول معين من سطح الأرض، فالثانية تساوي (1/86400) من اليوم الوسطي.

في النتيجة يمكن القول: إن الزمن هو قياس لحوادث متتالية و يُعَدُّ ككمية مطلقة في الميكانيك التقليدي، وهو عبارة عن كمية قياسية متغيرة باستمرار، ويؤخذ كمتغير مستقل، وتعَدُّ الكميات المتغيرة الأخرى كميات متغيرة بمرور الزمن، وتعد الثانية كوحدة قياسه، ويقاس انطلاقاً من لحظة ابتدائية ($t = 0$) يتفق عليها، وتتعين اللحظة الزمنية المعطاة بعدد الثواني التي مرت انطلاقاً من لحظة البدء، ويسمى الفرق بين لحظتين زمنيتين بالفترة الزمنية

في علم الحركة يؤخذ الزمن متغيراً مستقلاً، وتعتبر الكميات الأخرى كالمسافة والسرعة الخطية والزاوية، والتسارع الخطي والزاوي توابع لهذا المتغير.

3-3- مفهوم الجسم الصلب *Concept of Rigid Body*

الجسم الصلب هو مادة محدودة بسطح مغلق، ويعد في علم الميكانيك الهندسي صلداً أي لا تحدث فيه أي تشوهات نسبية بين أي جزأين من أجزائه، وأن المسافة بين أي نقطتين ضمنه تبقى ثابتة مهما تعرض لمؤثرات خارجية. هذه الفرضية مثالية، وعملياً تتغير جميع الأجسام الصلبة وتتشوه بمقدار معين تحت تأثير القوى، لكن عندما يكون مقدار التغير في الشكل مهملاً إذا ما قورن بأبعاد الجسم الكلية، أو بتغيرات موضع الجسم ككل، يمكن عندها استعمال فرضية الجسم الصلب، دون الوقوع في أخطاء تذكر.

4- التعاريف الأساسية *Basic Definitions*

سنورد فيما يلي بعضاً من التعاريف الأساسية اللازمة لدراسة علم الحركة.

4-1- المجموعة المقارنة *Reference Frame*

هي المجموعة التي تعين موضعاً في الفراغ بالنسبة لبعض الإحداثيات الجغرافية، بوساطة قياسات خطية أو زاوية، وتدل المشاهدات على أن النجوم تشكل جسما صلباً ثابتاً، والجملة المقيدة بجملة النجوم المتماسكة هي بدورها جملة ثابتة، وتسمى الجملة النجمية.

والمجموعة المقارنة الأساسية لقوانين الميكانيك الكلاسيكي هي مجموعة المقارنة العطالية الرئيسية أو الفلكية، وتسمى أحياناً مجموعة المقارنة النيوتنية.

(*Primary Inertial System or Astronomical Frame of Reference*)

وتتألف من ثلاثة محاور متعامدة خيالية تقع نقطة الأصل في مركز الشمس، وتتجه المحاور الثلاثة باتجاه نجوم ثابتة أساسية في الفضاء، أي: يفترض أنها لا تتحرك حركة دورانية ولا حركة انسحابية، وتبين القياسات أن قوانين الميكانيك التقليدي صحيحة من أجل هذه المجموعة من الإحداثيات، طالما أن السرعة المدروسة تكون مهملة بالمقارنة مع سرعة الضوء، وتسمى القياسات التي تجري بالنسبة لهذه المجموعة العطالية بالقياسات المطلقة (*Absolute*)، لكن من أجل سرعة من رتبة سرعة الضوء نفسها (300000 km/sec) يجب تطبيق النظرية النسبية.

عند دراسة الحركة على سطح الأرض تؤخذ عادة مجموعة محاور مرتبطة بالأرض، وتكون حركتها معقدة بالنسبة للمجموعة الرئيسية، لذا ينبغي إجراء تصحيحات على معادلات الميكانيك الأساسية، لكي يمكن تطبيقها على القياسات التي تجري بالنسبة لمجموعة الإحداثيات المرتبطة بالأرض.

مثلاً في حسابات حركة الصواريخ ومساراته في الفضاء، تكون حركة الأرض المطلقة مهمة، إلا أنه في أغلب المسائل الهندسية لحركة الأجسام الموجودة على سطح الأرض والباقية عليه، يكون مقدار التصحيح صغيراً جداً حيث يمكن إهماله، بالتالي يمكن في أمثال هذه المسائل تطبيق قوانين الميكانيك مباشرةً على القياسات الأرضية، والنظر إليها كقياسات مطلقة.

4-2- الجسيم المادي *Particle*

لا تعتمد حركة الجسم المادي على شكله، بل تعتمد أيضاً على أبعاده الهندسية، وعلى مواضع النقاط المكونة له، ولو توخينا الدقة الكاملة في دراستنا لما وجدنا في الطبيعة كلها شيئاً يمكن أن نسميه نقطة مادية، وذلك لأن مقداراً محدوداً من المادة لا بد أن يشغل بعض المكان، وعليه يمكن تسميته بالجسيم المادي.

كما يمكن أيضاً عَدُّ الجسم كجسيم، عندما تكون أبعاده بالنسبة للفراغ المحيط به صغيرة جداً، أو إذا كانت المسافات التي تقطعها نقط هذا الجسم خلال حركته كبيرة للغاية بالمقارنة مع أبعاده، وللتمثيل تعد الكرة الأرضية جسيماً في دراسة حركتها حول الشمس نظراً لصغر حجمها بالنسبة للمسافات الشاسعة التي تقطعها في مدارها الكبير حول الشمس.

4-3- الكمية القياسية *Scalar Quantity*

أو الكمية العددية وهي التي يعبر عنها بعدد من وحدات معينة ليس لها اتجاه فراغي مثل الزمن، درجة الحرارة، الطول، المساحة، الحجم، ولكل منها وحداته الخاصة كالساعة والدقيقة والثانية للزمن، وكالمتر المكعب للحجم، ولا تتضمن هذه الكميات بطبيعتها معنى الاتجاه، وتخضع للعمليات الحسابية والجبرية، وسنستخدم رمز النقطة فوق الحرف لتشير إلى اشتقاق بالنسبة للزمن، أي أن: $\dot{x}$ تعني dx/dt و $\ddot{x}$ تعني d^2x/dt^2 .

4-4- الكمية الشعاعية *Vector Quantity*

هي كمية يلزم لتحديدها تعيين الاتجاه بالإضافة إلى المقدار العددي، مثل السرعة، التسارع، الانتقال، وكلها لا يتم التعرف عليها إلا بذكر نقطة تأثيرها واتجاهها وقيمتها العددية، وسنرمز للكمية الشعاعية بحروف غامقة، مثلاً المتجه **AB** .

5- وصف مسائل علم الحركة *Description of Kinematics Problems*

إن غاية علم الحركة، هي فهم ووصف الكميات الحركية المختلفة من مسار وسرعة وتسارع، التي تميز حركة الجسم ككل، أو حركة كل جسيم من جسيماته على انفراد، بمعرفة معادلة حركة هذا الجسم أو الجسيم، ولا تتطلب دراسة الحركة أية قوانين أو بديهيات اضافية.

ولحل مسائل الحركة يجب أن تكون حركة الجسم أو الجسيم معطاة، أو موصوفة بطريقة ما، وإعطاء الحركة أو إعطاء معادلة حركة المتحرك يعني إعطاء موضعه في كل لحظة زمنية بالنسبة لمجموعة القياس المعطاة، ويعد تحديد الطرق الرياضية لإعطاء حركة الجسيم أو الأجسام إحدى مسائل الحركة المهمة، ولذا فسنبدأ دراسة حركة أي جسم بتحديد طرق إعطاء هذه الحركة.

كما يجب على الطالب أن يعتاد على ترتيب عمله وإتقانه، إذ إن الحلول مهما كانت تفقد قيمتها عند خلوها من الترتيب، وخصوصاً عند تعذر قراءتها بسهولة، وسيجد الطالب أن الترتيب الجيد سيساعده تلقائياً على تطوير قابليته وزيادتها لمعالجة المسائل وتحليلها، إذ تبدو كثير من المسائل صعبة ومعقدة في الوهلة الأولى، ولكن يصبح حلها متسلسلاً وواضحاً بدراستنا لها بأسلوب منتظم وخطوات متقنة.

كما أنه من الضروري على الطالب أن يقوم باختبار صحة حساباته وأجوبته، ودقتها، وخصوصاً عند حصوله على أرقام غير مقبولة، وعليه أن يتأكد دوماً من تجانس الوحدات المختلفة التي يستعملها في جميع العلاقات.

وللخبرة أهمية كبيرة جداً في التحليل والدراسة ولا نحصل على هذه الخبرة بخزن معادلات وعلاقات الحركة وحفظها فحسب، وإنما في أثناء دراسة وحل عدد كبير ومتنوع من المسائل في حالات مختلفة وفي شروط مختلفة أيضاً، ويمكن أن يتم حل أي مسألة بطريقتين:

1. باستخدام القيم العددية مباشرة في عمليات الحل.

2. باستخدام رموز تمثل مختلف الكميات، حيث يترك في هذه الطريقة جواب المسألة على شكل علاقة، ويمكن تبديل القيم العددية للحدود كلها مكان الرموز في أي مرحلة من مراحل الحسابات، إضافةً لذلك فإن لهذه الطريقة عدة مزايا عن الطريقة الأولى، وهي:

- الاختصار الذي نحصل عليه باستخدام الرموز.

- اختبار تجانس وحدات العلاقة في أي مرحلة من مراحل الحل بسهولة، بينما يتعذر ذلك عند استعمال الحل العددي.

- إمكانية أن يشكل الحل بالرموز الحل العام لمسألة ما، حيث يمكن استعماله مرات عدة من أجل إيجاد أجوبة المسألة نفسها؛ باستعمال مجموعات ومعطيات جديدة.

يجب على الطالب أن يعتاد على كلا الحلين، ولا يتم له ذلك إلا بكثرة التمرين، وسيجد أن حلولاً لمختلف معادلات علم الحركة يمكن أن تتم بإحدى الطرائق الثلاث التالية:

- الحل الرياضي المباشر عن طريق الحسابات اليدوية عندما يكون ذلك ممكناً، وعند كون الجواب المطلوب على شكل رموز جبرية، أو قيم عددية، حيث يدخل ضمن هذه الفئة معظم مسائل الحركة.

- الحل البياني، ويكون ذلك ممكناً وسهلاً في بعض المسائل، مثلاً عند تعيين السرعة والتسارع في الحركة النسبية لجسم صلب يتحرك حركة مستوية.

- الحل باستخدام الحاسبات الإلكترونية (*Computers*) في حل بعض المسائل، وهي طريقة حديثة قد تمكن من حل مسائل كان من المتعذر حسابها بالطرق الأخرى.

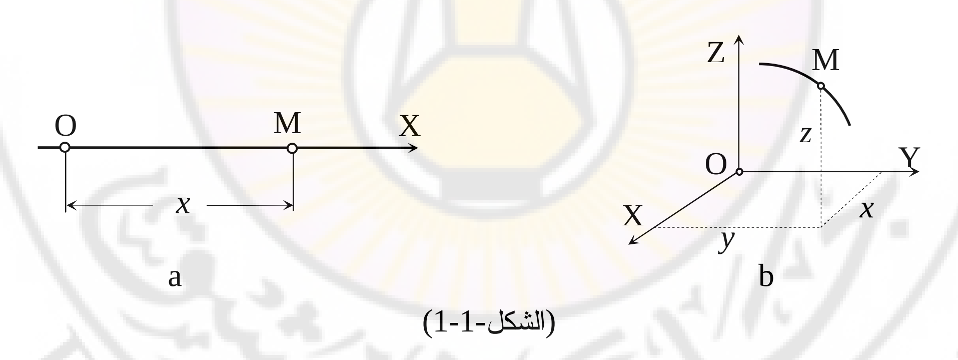
الفصل الأول

الحركة المنحنية لجسيم مادي

Curvilinear motion of particle

1- المسار *Path*

إن الخط المستمر C الذي يرسمه الجسيم المادي المتحرك M في أثناء حركته في الفراغ بدلالة جملة إحداثية ثابتة T(OXYZ) ، يسمى بمسار الجسيم، فهو إذاً يمثل المحل الهندسي لأوضاع الجسيم بمرور الزمن، ويعتبر أحد العناصر الهندسية للحركة، وهو عبارة عن منحنٍ فراغي ينتج عن تقاطع سطحين، ويكون في الحالة العامة منحنياً فراغياً أو مستوياً، وأبسط الحالات عندما يكون المسار مستقيماً، وبحسب شكل المسار تحدد حركة الجسيم، فإذا كان المسار خطاً مستقيماً OX كما في (الشكل1-1a) سميت الحركة بالحركة المستقيمة (*Rectilinear motion*)، وإذا كان خطاً منحنياً كما في (الشكل1-1b) سميت الحركة بالحركة المنحنية (*Curvilinear motion*).



(الشكل-1-1)

2- درجات الطلاقة لجسيم *Degrees of Freedom of a Particle*

إن مفهوم درجات الطلاقة ذو فائدة كبيرة في التعبير عن الأبعاد أو الإحداثيات اللازمة لتوصيف مواضع جميع الأجسام المتحركة، إذ إن عدد الإحداثيات المستقلة عن بعضها بعضاً واللازمة لتحديد وضع نظام ميكانيكي في أي لحظة يساوي عدد درجات الطلاقة لهذا النظام، تسمى هذه الإحداثيات المستقلة بالإحداثيات المكانية، ويساوي عددها العدد الكلي للإحداثيات مطروحاً منه عدد العلاقات الهندسية التي تربط بينها.

يلاحظ من (الشكل1-1b) أن وضع جسيم مادي M يتحرك بطلاقة في الفراغ، يتحدد بثلاث قيم جبرية مستقلة عن بعضها بعضاً، تمثل إحداثيات هذا الجسيم بالنسبة إلى جملة محاور ثابتة. يمكن أن تكون هذه الإحداثيات ديكارتية x , y , z أو أسطوانية r , θ, z أو أي إحداثيات أخرى. إذن للجسيم المادي الطليق الحركة في الفراغ ثلاث درجات طلاقة.

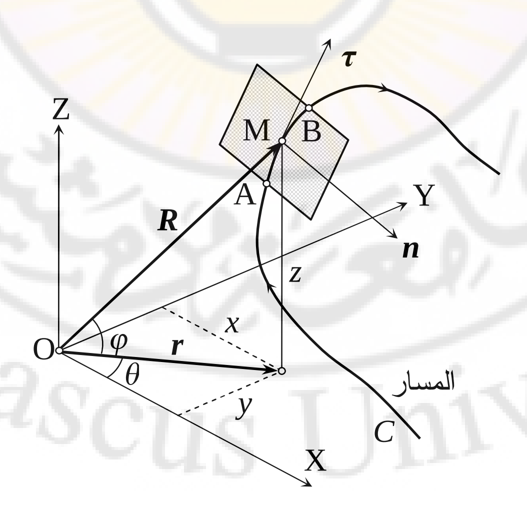
لكن اذا قيد الجسيم بالحركة على سطح، أو بشكل خاص في مستوي فإنه توجد بين الإحداثيات الثلاث علاقة هندسية هي تابع السطح المقيد للحركة، وبالتالي فإن وضع الجسيم يحدد عندئذ بإحداثيتين مستقلتين فحسب، أي: أن لها درجتي طلاقة.

أما إذا قيد الجسيم بمنحنٍ فإنه يبقى إحداثي مكاني واحد فحسب، لأن المنحني في العموم، هو خط تقاطع سطحين، وهذا يعني أن للجسيم في هذه الحالة درجة طلاقة واحدة.

3- الحركة المنحنية الفراغية لجسيم مادي

Curvilinear Space Motion of a Particle

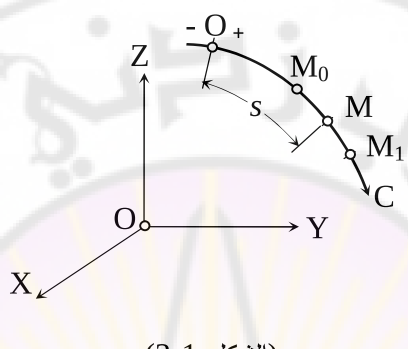
تتطلب دراسة حركة الجسيم المادي في الفراغ معرفة معادلة حركته بدلالة الزمن، أي معادلة انتقاله، التي تحدد موقع الجسيم في كل لحظة زمنية بدلالة جملة إحداثية مختارة كما هو مبين في (الشكل1-2)، والتي يمكن إيجادها بتطبيق إحدى الطرق الثلاث التالية:



(الشكل1-2)

1-3- الطريقة الطبيعية *Natural Method*

تستخدم الطريقة الطبيعية عندما يكون المسار C لجسيم مادي M يتحرك بدلالة الجملة الإحداثية الثابتة T(OXYZ) معلوم سلفاً، والموضح في (الشكل1-3).



(الشكل-1-3)

نختار لا على التعيين على هذا المسار نقطة ثابتة O نعدُّها نقطة بداية القياس، ثم نعد المسار محوراً منحنياً للإحداثيات، ونحدد عليه الاتجاهين الموجب والسالب كأي محور عادي للإحداثيات، وبالتالي يحدد موضع الجسيم M على المسار، تحديداً كاملاً بالإحداثية المنحنية s ، وحيدة القيمة تدعى بالفاصلة المنحنية، المساوية لطول القوس أي لبعد الجسيم عن المبدأ O ، مع وضع الإشارة الموجبة أو السالبة بحسب موضع الجسيم، وبحسب حركته انطلاقاً من المبدأ O إن كانت في الاتجاه الموجب أو السالب للمنحني.

عند الحركة ينتقل الجسيم إلى مواضعه M_1 و M_2 على التوالي، فتتغير الفاصلة المنحنية للمتحرك بمرور الزمن، لذا يمكننا أن نكتب المعادلة:

$$s = f(t) \qquad (1\text{-}1)$$

هذه المعادلة تعين موضع الجسيم في كل لحظة زمنية، وتدعى بمعادلة حركة الجسيم المادي على مسار منحن بالطريقة الطبيعية.

نشير إلى أن الاحداثية s في المعادلة (1-1) تحدد موضع الجسيم المتحرك على المسار لا المسافة التي قطعها، فإذا كان الجسيم في اللحظة t_0 في الموضع M_0 ، وفي اللحظة t أصبح في الموضع M ، فإن المسافة التي يقطعها الجسيم خلال فترة زمنية $|0 \to t|$، في حال الحركة باتجاه واحد تساوي إلى:

$$\Delta s = M_0M = OM - OM_0 = s - s_0 \qquad (2\text{-}1)$$

أي أن تغير الإحداثية المنحنية s خلال فترة زمنية جزئية dt تساوي إلى:

$$ds = \dot{f}(t).dt$$

فعند حركة الجسيم باتجاه تزايد s يكون ($\Delta s > 0$)، وعند حركته بالاتجاه المعاكس يكون ($\Delta s < 0$)، في حين أن تغير المسافة المقطوعة Δs هو موجب دوماً أي:

$$ds = |ds| = \left|\dot{f}(t)\right|.dt$$

وتكون المسافة التي قطعها الجسيم خلال المجال الزمني $|0 \rightarrow t|$ هو:

$$s_{0\rightarrow t} = \int_0^t \left|\dot{f}(t)\right|.dt \qquad (3\text{-}1)$$

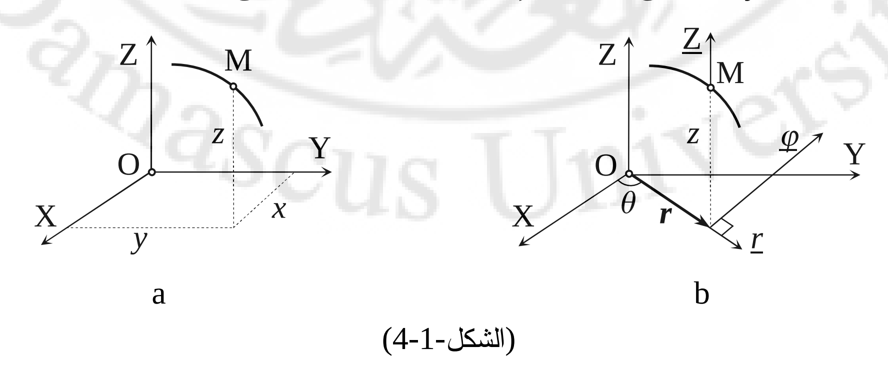
2-3- طريقة الإحداثيات *Coordinate Method*

تستخدم طريقة الإحداثيات عندما يكون مسار الجسيم المادي بدلالة جملة إحداثيات ثابتة T(OXYZ) غير معلوم سلفاً. بالتالي يمكن تحديد موضع الجسيم المتحرك M بإحداثياته الديكارتية (*Cartesian Coordinates*)، أي الإحداثيات الكرتيزية القائمة x , y , z كما في (الشكل-1-4a)، وتتغير هذه الإحداثيات الثلاث في أثناء الحركة بمرور الزمن. لذا يمكننا أن نكتب المعادلات:

$$x = f_1(t) \qquad y = f_2(t) \qquad z = f_3(t) \qquad (4\text{-}1)$$

هذه المعادلات تعين موضع الجسيم في كل لحظة زمنية، وتدعى بمعادلات حركة الجسيم المادي في الإحداثيات الديكارتية.

تمثل كل معادلة من المعادلات (1-4) معادلة حركة مسقط الجسيم على محاور الجملة الإحداثية، وبالتالي تتألف الحركة المنحنية الفراغية لجسيم من الحركات المستقيمة لمساقطها x و y و z على المحاور الإحداثية X و Y و Z على الترتيب.



(الشكل-1-4)

كما يمكن إعطاء حركة الجسيم في الفراغ كما في (الشكل4b-1)، بالإحداثيات الأسطوانية (*Cylindrical Coordinates*)، حيث تعين معادلات حركة الجسيم على مسار منحن بالمعادلات التالية:

$$r = f_1(t) \qquad q = f_2(t) \qquad z = f_3(t) \qquad (5\text{-}1)$$

وعلاقات الانتقال من الإحداثيات الأسطوانية إلى الإحداثيات الديكارتية القائمة هي:

$$x = r.\cos q \qquad y = r.\sin q \qquad z = z \qquad (6\text{-}1)$$

وعلاقات الانتقال من الإحداثيات الديكارتية القائمة إلى الإحداثيات الأسطوانية هي:

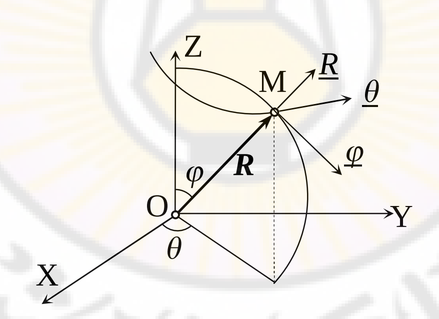
$$\tan q = y / x \qquad r = (x^2 + y^2)^{1/2} \qquad z = z \qquad (7\text{-}1)$$

$$\sin q = y / (x^2 + y^2)^{1/2} \qquad \cos q = x / (x^2 + y^2)^{1/2}$$

كذلك يمكن إعطاء حركة الجسيم في الفراغ (الشكل5-1)، بالإحداثيات الكروية (*Spherical Coordinates*)، حيث تعين حركة الجسيم على مسار منحن بالمعادلات التالية:

$$R = f_1(t) \qquad q = f_2(t) \qquad j = f_3(t) \qquad (8\text{-}1)$$

حيث R بعد الجسيم عن المركز الثابت O ، و φ الزاوية بين OM والمحور OZ ، و θ زاوية دوران المستوي ZOM بالنسبة إلى المستوي الثابت ZOX .



(الشكل-1-5)

وعلاقات الانتقال من الإحداثيات الكروية إلى الإحداثيات الديكارتية القائمة هي:

$$x = R.\sin j .\cos q \qquad y = R.\sin j .\sin q \qquad z = R.\cos j \qquad (9\text{-}1)$$

وعلاقات الانتقال من الإحداثيات الديكارتية القائمة إلى الإحداثيات الكروية هي:

$$\cos q = x / (x^2 + y^2)^{1/2} \qquad \sin q = y / (x^2 + y^2)^{1/2} \qquad \tan q = y / x \qquad (10\text{-}1)$$

$$\cos j = z / (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} ، \tan j = (x^2 + y^2)^{1/2} / z ، R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

ويمكننا حذف وسيط الزمن t من معادلات الحركة لإيجاد معادلة مسار الجسيم المتحرك، وهي علاقة تربط بين إحداثيات الجسيم.

3-3- طريقة المتجهات *Vector Method*

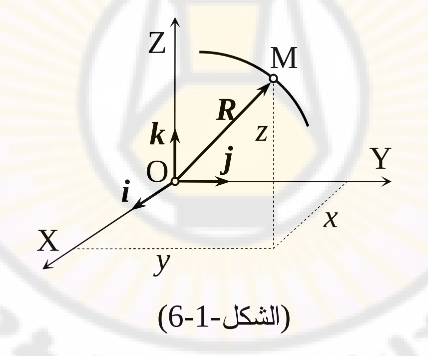
نعد الجسيم M يتحرك بدلالة جملة إحداثية T(OXYZ) ، حيث يمكن تحديد موضعه في أي لحظة زمنية بالمتجه $\boldsymbol{R}(t)$ ، الذي يتجه من نقطة المبدأ O إلى موضع الجسيم الموضح في (الشكل-1-6)، ويدعى بالمتجه الموضعي للجسيم، أو بنصف القطر الشعاعي (*Radius vector*).

في أثناء حركة الجسيم على مساره يتغير مقدار واتجاه المتجه $\boldsymbol{R}$ مع مرور الزمن، بالتالي فإن $\boldsymbol{R}$ متجه متغير يعتمد على المتغير المستقل t .

$$\mathbf{OM} = \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(t) \tag{11-1}$$

تحدد هذه العلاقة معادلة حركة الجسيم على خط منحنٍ بالطريقة الاتجاهية أو الشعاعية، ويحدد المحل الهندسي لنهايات المتجه $\boldsymbol{R}(t)$ مسار الجسيم M المتحرك.

تصلح طريقة المتجهات لإعطاء الحركة عند إيجاد العلاقات العامة، حيث يمكن بواسطتها وصف حركة الجسيم بمعادلة شعاعيه واحدة بدلاً من ثلاث معادلات قياسية.



(الشكل-1-6)

ويمكن الانتقال إلى طريقة الإحداثيات الديكارتية بإسقاط العلاقة (1-11) على المحاور الإحداثية الموجهة، حيث نحصل على مساقط المتجه $\boldsymbol{R}$ التي تساوي إحداثيات موضع الجسيم x , y , z ، ومع فرض المتجهات الواحدية للمحاور الإحداثية $\boldsymbol{i} , \boldsymbol{j} , \boldsymbol{k}$ يمكننا أن نكتب:

$$\mathbf{OM} = \boldsymbol{R} = x.\boldsymbol{i} + y.\boldsymbol{j} + z.\boldsymbol{k} \tag{12-1}$$

بالتالي، إذا كانت حركة الجسيم في الفراغ محددة بالمعادلات:

$$x = 3\,t \quad , \quad y = 14\,t^2 \quad , \quad z = t^2 - 1$$

فإن المعادلة الشعاعية لهذه الحركة تمثل بـــ:

$$\mathbf{OM} = \boldsymbol{R} = 3t.\boldsymbol{i} + 14t^2.\boldsymbol{j} + (t^2 - 1)\,\boldsymbol{k}$$

حيث يمكن بواسطة هذه المعادلة أن نرسم المتجه $\boldsymbol{R}$ لأية لحظة زمنية، وبذلك نحدد موضع الجسيم المتحرك، ففي اللحظة ($t_1 = 1$ sec)، يكون المتجه الموضعي محدداً بـــ:

$$\mathbf{OM_1} = \boldsymbol{R_1} = 3\boldsymbol{i} + 14\boldsymbol{j}$$

ويُرسم هذا المتجه كقطر في متوازي الأضلاع المناظر، وهكذا.

وبالعكس إذا كانت حركة الجسيم معطاة بالمعادلة الشعاعية:

$$\mathbf{OM} = \boldsymbol{R} = (2-t)\,\boldsymbol{i} + 3t^2.\,\boldsymbol{j} - 6\,t.\boldsymbol{k}$$

فإن معادلات حركة هذا الجسيم بطريقة الإحداثيات تمثل بـــ:

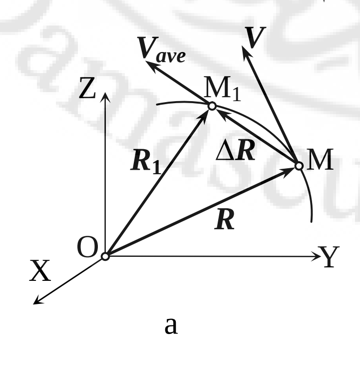
$$x = (2-t) \quad , \quad y = 3t^2 \quad , \quad z = -6t$$

4- مفهوم السرعة *Concept of Velocity*

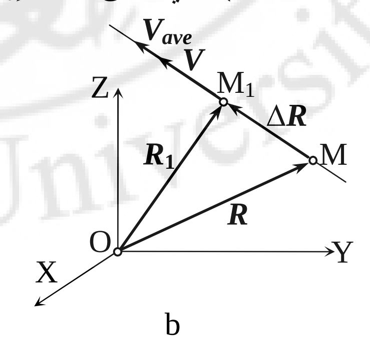
إن سرعة الجسيم في الحركة المنحنية هي مقدار شعاعي يعين في كل لحظة من الزمن تغير مقدار واتجاه انتقال الجسيم بالنسبة للزمن بدلالة جملة مقارنة، ولا تتحول السرعة إذا استبدلنا الجملة المقارنة بأخرى ساكنة بدلالتها، لذا يعد المتجه المسمى بسرعة الجسيم إحدى المميزات الحركية الأساسية لحركة الجسيم، الذي يتحدد بالطرق التالية.

4-1- السرعة بطريقة المتجهات

نفرض أن الجسيم يتحرك على منحنٍ ما بدلالة جملة محاور إحداثية T(OXYZ)، ففي اللحظة الزمنية t يكون عند الموضع M الذي يتحدد بالمتجه $\boldsymbol{R}$ ، وفي اللحظة t_1 ينتقل الجسيم إلى الموضع M_1 الذي يتحدد بالمتجه $\boldsymbol{R_1}$ كما في (الشكل-1-7a)، عندئذ يتحدد انتقال الجسيم خلال الفترة الزمنية ($\Delta t = t_1 - t$) بالمتجه ($\mathbf{MM_1} = \boldsymbol{R_1} - \boldsymbol{R}$)، أي ($\Delta\mathbf{M} = \Delta\boldsymbol{R}$) الذي يدعى بمتجه إزاحة أو انتقال الجسيم (*Displacement Vector*).



a



b

(الشكل-1-7)

فعندما يتغير الانتقال بمقادير متساوية خلال مُدات زمنية متساوية، فإن الحركة تكون منتظمة (*Uniform Motion*)، وعندما يتغير الانتقال بمقادير غير متساوية خلال مُدات زمنية متساوية، فالحركة تكون غير منتظمة (*Variable Motion*)، وفي هذه الحالة ينتج مفهوم السرعة الوسطية (*Average Velocity*)

بالتالي نسبة متجه إزاحة الجسيم إلى الفترة الزمنية المناظرة ($\mathbf{\Delta M} / \Delta t$)، تمثل متجه السرعة الوسطية للجسيم M خلال الفترة الزمنية Δt ، ويرمز له بـــ $\boldsymbol{V_{av}}$ ، كما هو مبين في (الشكل-1-7b)، أي:

$$\boldsymbol{V}_{av} = \frac{\mathbf{\Delta M}}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{R}}{\Delta t} \qquad (13\text{-}1)$$

نلاحظ أن السرعة الوسطية هي كمية شعاعيه قيمتها العددية:

$$V_{av} = \frac{\Delta \mathrm{M}}{\Delta t}$$

اتجاهها ومنحاها باتجاه ومنحى المتجه $\mathbf{\Delta M}$ ، أي على امتداد الوتر، لأن Δt كمية قياسية موجبة دوماً ($\Delta t > 0$).

من الواضح أنه كلما صغرت الفترة الزمنية Δt التي حسبت خلالها السرعة الوسطية، ميز المقدار V_{av} حركة الجسيم بدقة أكبر، فعندما تتناهى Δt للصفر تتناهى M_1 إلى M ، وتتناهى النسبة ($\mathbf{\Delta M} / \Delta t$) إلى نهاية محدودة تدعى بالسرعة الآنية (*Instantaneous Velocity*) للجسيم في M في اللحظة t ، ونرمز لها بـــ $\boldsymbol{V}$ ، أي:

$$\boldsymbol{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{V}_{av} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{\Delta M}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{dM}}{dt} = \frac{\boldsymbol{dR}}{dt} = \dot{\boldsymbol{R}}(t) \qquad (14\text{-}1)$$

فمتجه السرعة الآنية يساوي إلى مشتق موضع الجسيم المتحرك بدلالة الزمن، وهو أيضاً يساوي إلى مشتق المتجه الموضعي للجسيم بدلالة الزمن.

إن حامل السرعة الآنية هو المماس، وذلك لأن حامل السرعة الوسطية هو الوتر MM_1 ، فعندما تتناهى Δt الى الصفر تتناهى M_1 إلى M ، ويتناهى الوتر MM_1 إلى المماس للمسار في الوضع M .

وإن اتجاه السرعة الآنية هو اتجاه الحركة وذلك لأن تزايد Δt موجب دوماً، وبالتالي يتجه المتجه ($\mathbf{\Delta M} / \Delta t$) في اتجاه $\mathbf{\Delta M}$ أي في اتجاه الحركة.

2-4- السرعة بطريقة الإحداثيات

إذا أعطيت حركة الجسيم بالمعادلات (1-4)، فاستناداً إلى المعادلة (1-12) نحصل على علاقة المتجه الموضعي للجسيم، واستناداً إلى المعادلة (1-14) نحصل على علاقة متجه السرعة الخطية للجسيم:

$$\boldsymbol{V} = \dot{x}.\boldsymbol{i} + \dot{y}.\boldsymbol{j} + \dot{z}.\boldsymbol{k} = \boldsymbol{V}_{\mathrm{X}} + \boldsymbol{V}_{\mathrm{Y}} + \boldsymbol{V}_{\mathrm{Z}} = V_{\mathrm{X}}.\boldsymbol{i} + V_{\mathrm{Y}}.\boldsymbol{j} + V_{\mathrm{Z}}.\boldsymbol{k} \qquad (15\text{-}1)$$

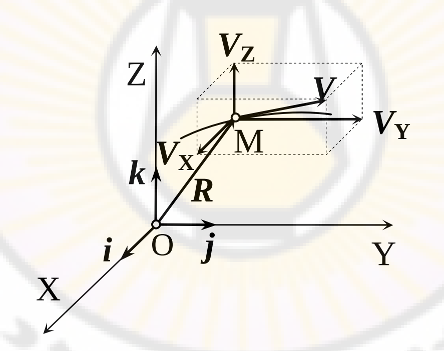
حيث:

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{X}} = V_{\mathrm{X}}.\boldsymbol{i} = \dot{x}.\boldsymbol{i} \quad , \quad \boldsymbol{V}_{\mathrm{Y}} = V_{\mathrm{Y}}.\boldsymbol{j} = \dot{y}.\boldsymbol{j} \quad , \quad \boldsymbol{V}_{\mathrm{Z}} = V_{\mathrm{Z}}.\boldsymbol{k} = \dot{z}.\boldsymbol{k}$$

تمثل المركبات القائمة لمتجه السرعة (*Rectangular Components of Velocity*) الموضحة في (الشكل-1-8)، والقيمة العددية لهذه المركبات القائمة تساوي إلى:

$$V_{\mathrm{X}} = \dot{x}(t) \quad , \quad V_{\mathrm{Y}} = \dot{y}(t) \quad , \quad V_{\mathrm{Z}} = \dot{z}(t) \qquad (16\text{-}1)$$

نلاحظ أن مسقط السرعة على محاور الإحداثيات تساوي المشتقات الأولى لإحداثيات الجسيم بالنسبة للزمن، أي أنها تمثل سرعة مسقط الجسيم المتحرك على محاور الحركة.



(الشكل-1-8)

فإذا كانت إشارة المركبة V_{X} موجبة، فهذا يشير إلى أن اتجاه المركبة الشعاعية للمسقط $\boldsymbol{V}_{\mathrm{X}}$ هي بالاتجاه الموجب للمحور X ، وأن اتجاه حركة مسقط الجسيم عليه هي الجهة اليمنى، والإشارة السالبة تعني أنها بالاتجاه السالب للمحور X ، وأن اتجاه حركة مسقط الجسيم عليه هي الجهة اليسرى، ونحصل بنفس الطريقة على اتجاهات المركبات الأخرى بدءاً من إشارة المركبة العددية الموافقة.

أما القيمة العددية لمتجه السرعة الآنية فيمكن الحصول عليها من مركبات للسرعة:

$$V = (V_{\mathrm{X}}^2 + V_{\mathrm{Y}}^2 + V_{\mathrm{Z}}^2)^{1/2} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{1/2} \qquad (17\text{-}1)$$

ووحدات قياس السرعة هي m/sec ، ويتعين منحى السرعة الآنية $\boldsymbol{V}$ واتجاهها بالزوايا المحصورة بين متجه السرعة $\boldsymbol{V}$ ومحاور الإحداثيات، ونرمز لتجييات هذه الزوايا الموجهة بـــ α , β , γ التي تساوي إلى:

$$\alpha = \cos(\boldsymbol{V},\boldsymbol{i}) = \frac{V_X}{V} \ , \ \beta = \cos(\boldsymbol{V},\boldsymbol{j}) = \frac{V_Y}{V} \ , \ \gamma = \cos(\boldsymbol{V},\boldsymbol{k}) = \frac{V_Z}{V} \quad (18\text{-}1)$$

بالتالي يمكننا أن نكتب:

$$\frac{\alpha}{\dot{x}} = \frac{\beta}{\dot{y}} = \frac{\gamma}{\dot{z}} = \pm\frac{1}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}} \quad (19\text{-}1)$$

وإذا أعطيت حركة الجسيم بطريقة الإحداثيات الأسطوانية تكون مركبات السرعة على المحاور $\underline{Z} , \underline{\theta} , \underline{r}$ الموضحة في (الشكل4b-1)، هي:

$$V_r = \dot{r}(t) \quad , \quad V_\theta = r.\dot{\theta}(t) \quad , \quad V_Z = \dot{z}(t) \quad (20\text{-}1)$$

وتكون القيمة العددية لسرعة الجسيم:

$$V = (V_r^2 + V_\theta^2 + V_Z^2)^{1/2} = (\dot{r}^2 + r^2.\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)^{1/2} \quad (21\text{-}1)$$

وإذا أعطيت حركة الجسيم بطريقة الإحداثيات الكروية تكون مركبات السرعة على المحاور $\underline{\theta} , \underline{\varphi} , \underline{R}$ الموضحة في (الشكل5-1)، هي:

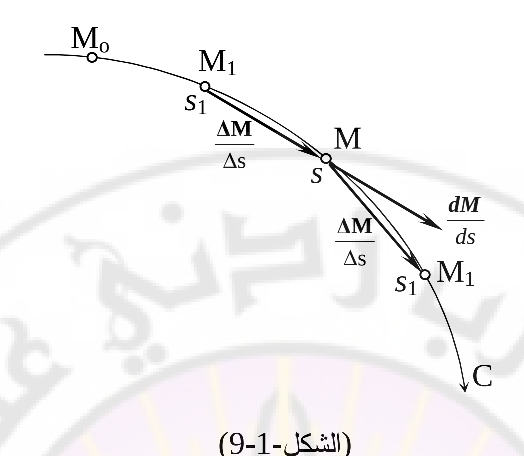
$$V_R = \dot{R}(t) \quad , \quad V_\varphi = R.\sin\theta.\dot{\varphi}(t) \quad , \quad V_\theta = R.\dot{\theta}(t) \quad (22\text{-}1)$$

وتكون القيمة العددية لسرعة الجسيم:

$$V = (V_R^2 + V_\varphi^2 + V_\theta^2)^{1/2} \quad (23\text{-}1)$$

3-4- السرعة بالطريقة الطبيعية

ليكن C مسار الجسيم المتحرك M الموضح في (الشكل-1-9)، نختار عليه M_0 الموضع الابتدائي للمتحرك نعده مبدأ للأقواس، فإذا كان s و s_1 الإحداثيتان المنحنيتان للمتحرك في وضعية M و M_1 ، فإن العدد ($s_1 - s = \Delta s$) يمثل طول القطعة المنحنية المحددة بالموضعين M و M_1 على المسار، وتعني الإشارة الموجبة أو السالبة لها أن M_1 تسبق M أو تليها.



(الشكل-1-9)

يتصف القوس $\overline{MM_1}$ بخاصة أساسية، وهي أنه بانتهاء الموضع M_1 إلى M تتناهى نسبة طول القوس $\overline{MM_1}$ إلى طول الوتر $\overline{MM_1}$ إلى الواحد، أي أن طول الوتر ($\Delta M = \overline{MM_1}$) يقترب من الطول Δs طول القوس $\overline{MM_1}$ عندما تتناقص Δt .

بالتالي علاقة السرعة (1-14) يمكن أن تكتب بالشكل:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} V_{av} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \qquad (24\text{-}1)$$

وهكذا نحصل على القيمة العددية للسرعة الآنية باشتقاق طول القوس s الذي يرسمه الجسيم المادي المتحرك بالنسبة للزمن.

كما أن مفاهيم الاشتقاق تقودنا إلى العلاقة التالية:

$$\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{dM}}{dt} = \frac{\boldsymbol{dM}}{ds}.\frac{ds}{dt} = V.\frac{\boldsymbol{dM}}{ds} \qquad (25\text{-}1)$$

حيث المتجه $\boldsymbol{dM} / ds$ يكون محمولا على المماس، ويتجه باتجاه الأقواس المتزايدة دوماً. بالفعل:

إذا اتجه الجسيم من الموضع M إلى M_1 باتجاه الأقواس المتزايدة كان ($\Delta s = s_1 - s$) موجباً، واتجه المتجه $\boldsymbol{\Delta M} / \Delta s$ باتجاه الحركة، وباتجاه الأقواس المتزايدة كما في (الشكل-1-9).

وإذا اتجه الجسيم من الموضع M إلى M_1 بعكس اتجاه الأقواس المتزايدة كان ($\Delta s = s_1 - s$) سالباً، واتجه المتجه $\boldsymbol{\Delta M} / \Delta s$ بعكس اتجاه الحركة، أي باتجاه الأقواس المتزايدة كما في (الشكل-1-9).

إذاً يتجه المتجه $\Delta\mathbf{M} / \Delta s$ دوماً في اتجاه الأقواس المتزايدة، وبما أن طوله هو الواحد، يمكننا أن نكتب:

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{ds} = \boldsymbol{\tau} \qquad (26\text{-}1)$$

حيث $\boldsymbol{\tau}$ هو المتجه الواحدي للمماس للمسار الموجه C ، ويتجه هذا المماس دوما باتجاه الأقواس المتزايدة. إذاً يمكننا أن نكتب استناداً إلى العلاقة (1-25)، ما يلي:

$$\boldsymbol{V} = V.\boldsymbol{\tau} \qquad (27\text{-}1)$$

بالتالي يكون $\boldsymbol{V}$ محمولاً على المماس، ويتجه باتجاه المماس إذا كان $(V = \dot{s})$ موجباً، أي أن الحركة باتجاه الأقواس المتزايدة والعكس بالعكس.

يمكن كتابة العلاقة (1-27) بالشكل:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{V}}{V} \qquad (28\text{-}1)$$

بإسقاط هذه العلاقة على جملة المحاور الإحداثية بعد معرفة معادلات الحركة، يمكن تحديد مركبات المتجه الواحدي $\boldsymbol{\tau}$ ، والتي تمثل تجيبات زوايا توجيه متجه السرعة α , β , γ المعينة بالعلاقة (1-18).

كما يمكن مكاملة العلاقة (1-24) لحساب طول القوس في فترة زمنية محصورة بين t_0 و t :

$$s - s_0 = \int_{t_0}^{t} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}.\, dt \qquad (29\text{-}1)$$

ومع افتراض أن الفاصلة المنحنية ($s_0 = 0$) عندما يكون ($t_0 = 0$) نحصل على:

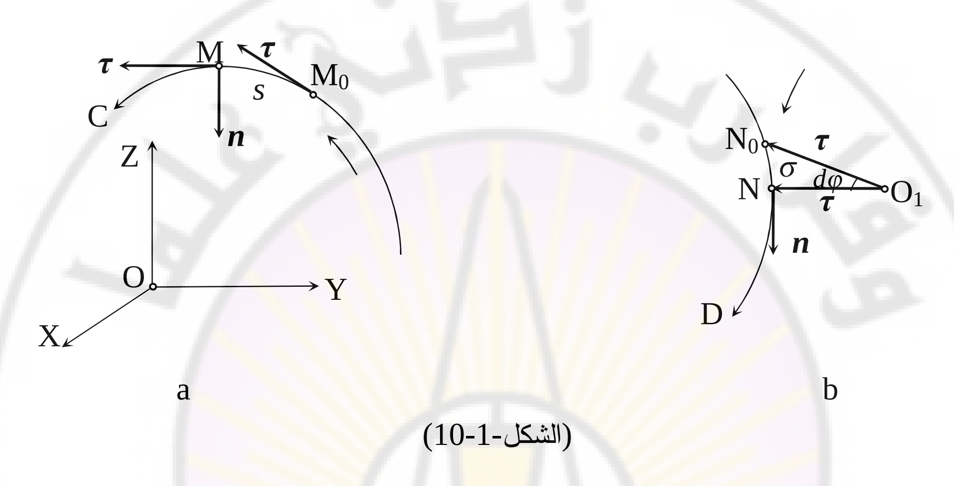
$$s = \int_{0}^{t} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}.\, dt \qquad (30\text{-}1)$$

تعطي المعادلة الأخيرة طريقة الانتقال من الإحداثيات الديكارتية إلى الطريقة الطبيعية لإعطاء معادلة حركة الجسيم.

5- جملة ثلاثية فرينية *Freinet's Frame of Reference*

هي جملة إحداثية قائمة مباشرة متحركة مقيدة بالجسيم المتحرك أو الجسم المتحرك، وتعين محاورها بالطريقة التالية:

إذا تحرك جسيم M على مسار منحنٍ C كما في (الشكل-1-10a) كان المماس في M لهذا المنحني متحولاً ومقيداً بالجسيم المتحرك، فهو يحدد المحور الأول للثلاثية المتحركة. نرمز لمتجهه الواحدي بـــ $\boldsymbol{\tau}$ ، ويدعى بالمحور المماسي (*Tangential Axis*).



(الشكل-1-10)

من نقطة ثابتة O_1 ننشئ المتجه ($\mathbf{O_1N} = \boldsymbol{\tau}$) الموافق للمتجه الواحدي لمماس مسار الجسيم المتحرك في M كما في (الشكل-1-10b)، حينئذ ترسم N نهاية المتجه $\mathbf{O_1N}$ خطاً موجهاً مثل D مرسوماً على سطح كرة نصف قطرها يساوي الواحد، لأن طول المتجه $\boldsymbol{\tau}$ يساوي الواحد.

نسمي الخط الموجه D بدليل المماسات، وتوافق N_0 الموضع M_0 ونعد ($N_0N = \sigma$) الفاصلة المنحنية له، بالتالي يوجه الخط D في اتجاه الأقواس المتزايدة له ويوافق اتجاه الأقواس المتزايدة للمسار C نفسها، ومنه:

$$\frac{d\sigma}{ds} > 0$$

كما نعد المتجه الواحدي للمماس للخط D في N هو $\boldsymbol{n}$ ، حيث:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{dN}}{ds} \qquad (31\text{-}1)$$

ونرمز للزاوية المحصورة بين المماسين للمسار C في الموضعين M و M_0 بـــ $d\varphi$ التي تدعى بزاوية التلامس (*Contiguous Angle*).

نعتبر العلاقة:

$$\boldsymbol{\tau}^2 = 1 \qquad (32\text{-}1)$$

نشتقها بدلالة الفاصلة المنحنية s :

$$\boldsymbol{\tau}.\frac{\boldsymbol{d}t}{ds} = 0 \qquad (33\text{-}1)$$

وتعني العلاقة (1-33) أن المتجه $\boldsymbol{d\tau}/ds$ يعامد المتجه $\boldsymbol{\tau}$ فهو يعامد المماس للمسار C في الموضع M ، ويمكن أن نكتب:

$$\frac{\boldsymbol{d}t}{ds} = \frac{\boldsymbol{dN}}{ds} = \frac{\boldsymbol{dN}}{ds}.\frac{ds}{ds} = \frac{ds}{ds}.\boldsymbol{n} \qquad (34\text{-}1)$$

وتعني العلاقة (1-32) أن مشتق $\boldsymbol{\tau}$ بدلالة القوس s هو متجه حامله المماس للخط D ، ويتجه في اتجاه هذا المماس لأن ($d\sigma/ds > 0$).

يسمى حامل المتجه $\boldsymbol{d\tau}/ds$ بالناظم الأساسي (*Principal Normal*) للمسار C في الموضع M ، ومتجهه الواحدي هو $\boldsymbol{n}$ ، ويحدد المحور الثاني للثلاثية المتحركة، ولا تتحول جهة الناظم الأساسي إذا بدلنا جهة الأقواس المتزايدة، وبالتالي يتجه المتجه $\boldsymbol{d\tau}/ds$ في اتجاه الناظم الأساسي للمسار C في الموضع M .

بما أن أبعاد المشتق $d\sigma/ds$ هي أبعاد مقلوب طول ذلك لأن ds تمثل طولاً:

$$ds = dM = [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]^{1/2} \qquad (35\text{-}1)$$

في حين:

$$ds = dN = [(da)^2 + (db)^2 + (dg)^2]^{1/2} \qquad (36\text{-}1)$$

حيث إن α, β, γ هي التجيبات الموجهة للمتجه الواحدي τ ، ولا علاقة لتجيبات الموجه بواحدة قياس الأطوال، لذا يمكننا أن نضع:

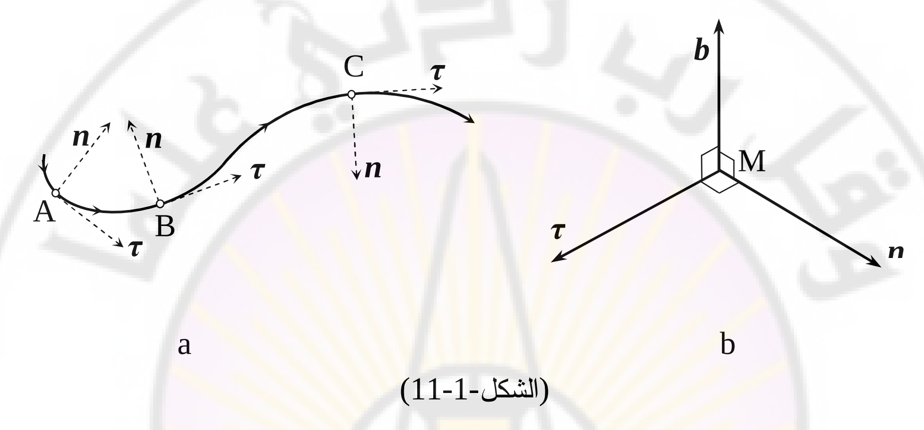
$$\frac{ds}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\mathrm{O}_1 N.\Delta j}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta j}{\Delta s} = K = \frac{1}{r} \qquad (37\text{-}1)$$

حيث نعلم أن نهاية النسبة بين زاوية التلامس $\Delta\varphi$ وطول القوس ($MM_1 = \Delta s$) تعين انحناء المنحني K (*Curvature*) في الموضع M ، والانحناء هو مقلوب نصف قطر الانحناء ρ (*Radius of Curvature*) للمسار C في الموضع M ، وهو مقدار له أبعاد وطول، وبالاستناد إلى العلاقة (1-33) يمكن أن نضع:

$$\frac{\boldsymbol{d\tau}}{ds} = \frac{1}{r}\boldsymbol{n} \qquad (38\text{-}1)$$

ولما كان $\boldsymbol{d\tau}/ds$ يتجه دوماً في اتجاه $\boldsymbol{n}$ وجب أن يكون ($1/\rho > 0$) موجباً.

بالتالي تتحرك المتجهات $\boldsymbol{\tau}$ و $\boldsymbol{n}$ على امتداد المسار مع الجسيم المتحرك كما هو موضح في (الشكل-1-11a)، من A إلى B وإلى C ، حيث يتجه المتجه $\boldsymbol{\tau}$ باتجاه الأقواس المتزايدة، أما المتجه $\boldsymbol{n}$ فيتجه نحو مركز تقوس المسار، ويتحول الاتجاه الموجب له من جانب إلى أخر للمنحني إذا تبدل اتجاه التقوس.



(الشكل-1-11)

أما المحور الثالث للثلاثية المتحركة فهو المتجه $\boldsymbol{b}$ الذي تعطى مركباته في العلاقة:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\tau} \wedge \boldsymbol{n} \qquad (39\text{-}1)$$

ويعرف $\boldsymbol{b}$ بالمتجه الواحدي للناظم الثانوي (*Binormal*)، وتؤلف محاور المتجهات الثلاثة $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ ، ثلاثية متحركة قائمة ومباشرة مقيدة بالجسيم المتحرك. تعرف باسم ثلاثية فرينية، وتكون المتجهات الواحدية $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ لهذه المحاور معينة تماماً في كل نقطة من نقاط المسار C ، كما هو موضح في (الشكل-1-11b).

نسمي المستوي $M\boldsymbol{nb}$ بالمستوي الناظمي (*Normal Plane*)، ونسمي المستوي $M\boldsymbol{\tau b}$ بالمستوي المعدل (*Rectifying Plane*)، ونسمي المستوي $M\boldsymbol{\tau n}$ بالمستوي الملاصق (*Osculating Plane*) للمسار C عند الموضع M للجسيم المتحرك.

6- مفهوم التسارع *Concept of Acceleration*

ان تسارع جسيم في الحركة المنحنية هو مقدار شعاعي يعين في كل لحظة من الزمن تغير مقدار سرعة الجسيم واتجاهه بالنسبة للزمن، بالتالي فهو المقدار الذي يعين عدم انتظام الحركة، ويعتبر المتجه المسمى بتسارع الجسيم إحدى المميزات الحركية الأساسية لحركة الجسيم، الذي يتحدد بالطرائق التالية.

6-1- التسارع بطريقة المتجهات

نفرض أن الجسيم يتحرك على منحنى ما بدلالة جملة محاور إحداثية T(OXYZ)، ففي اللحظة الزمنية t يكون عند الموضع M وسرعته عندئذ تساوي لـــ $\boldsymbol{V}$ ، وفي اللحظة t_1 ينتقل الجسيم إلى الموضع M_1 وسرعته عندئذ تساوي لـــ $\boldsymbol{V_1}$ ، ينتج أن سرعة الجسيم تكتسب تغيراً خلال الفترة الزمنية ($\Delta t = t_1 - t$) مساوياً لـــ ($\boldsymbol{\Delta V} = \boldsymbol{V_1} - \boldsymbol{V}$)، والذي يتجه دوما في ناحية تقعر منحني المسار كما هو موضح في (الشكل-1-12).

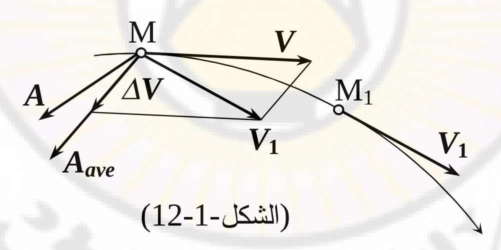
بالتعريف نسبة متجه تغير سرعة الجسيم إلى الفترة الزمنية المناظرة ($\boldsymbol{\Delta V} / \Delta t$)، تمثل متجه التسارع الوسطي (*Average Acceleration*) للجسيم في M خلال الفترة الزمنية Δt ، ويرمز له بـــ $\boldsymbol{A_{av}}$ ، أي:

$$\boldsymbol{A_{av}} = \frac{\boldsymbol{\Delta V}}{\Delta t} \tag{40-1}$$

نلاحظ أن التسارع الوسطي هو كمية شعاعية قيمته العددية:

$$A_{av} = \frac{\Delta \mathrm{V}}{\Delta t} = \frac{V_1 - V}{t_1 - t} \tag{41-1}$$

اتجاهه ومنحاه باتجاه ومنحى المتجه $\boldsymbol{\Delta V}$ لأن Δt كمية قياسية موجبة دوماً ($\Delta t > 0$).



(الشكل-1-12)

من الواضح أنه كلما صغرت الفترة الزمنية Δt التي حسب خلالها التسارع الوسطي، ميز المقدار $\boldsymbol{A_{av}}$ تسارع الجسيم بدقة أكبر، فعندما تتناهى Δt للصفر، تتناهى $\boldsymbol{V_1}$ إلى $\boldsymbol{V}$ ، وتتناهى النسبة ($\boldsymbol{\Delta V} / \Delta t$) إلى نهاية محدودة تدعى بالتسارع الآني (*Instantaneous Acceleration*) للجسيم في M في اللحظة t ، نرمز له بـــ $\boldsymbol{A}$ ، أي:

$$\boldsymbol{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{A_{av}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{\Delta V}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{dV}}{dt} = \frac{\boldsymbol{d^2M}}{dt^2} = \ddot{\boldsymbol{R}}(t) \tag{42-1}$$

فمتجه التسارع الآني يساوي إلى مشتق متجه السرعة الآنية بدلالة الزمن، أو إلى المشتق الثاني لموضع الجسيم بدلالة الزمن، وهو يساوي أيضاً المشتق الثاني للمتجه الموضعي للجسيم بدلالة الزمن.

2-6- التسارع بطريقة الإحداثيات

بافتراض أن متجه سرعة الجسيم بطريقة الإحداثيات معطى بالعلاقة (1-13)، وباشتقاقها بالنسبة للزمن نحصل على متجه التسارع:

$$\boldsymbol{A} = \ddot{x}.\boldsymbol{i} + \ddot{y}.\boldsymbol{j} + \ddot{z}.\boldsymbol{k} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{X}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{Y}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{Z}} = A_{\mathrm{X}}.\boldsymbol{i} + A_{\mathrm{Y}}.\boldsymbol{j} + A_{\mathrm{Z}}.\boldsymbol{k} \qquad (43\text{-}1)$$

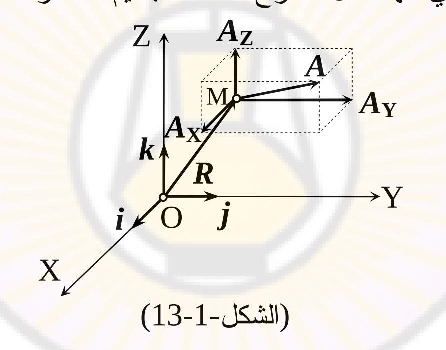
حيث:

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{X}} = A_{\mathrm{X}}.\boldsymbol{i} \quad , \quad \boldsymbol{A}_{\mathrm{Y}} = A_{\mathrm{Y}}.\boldsymbol{j} \quad , \quad \boldsymbol{A}_{\mathrm{Z}} = A_{\mathrm{Z}}.\boldsymbol{k}$$

تمثل المركبات القائمة لمتجه التسارع (*Rectangular Components of Acceleration*) الموضحة في (الشكل-1-13)، والقيمة العددية لهذه المركبات القائمة تساوي إلى:

$$A_{\mathrm{X}} = \dot{V}_{\mathrm{X}}(t) = \ddot{x}(t) \quad , \quad A_{\mathrm{Y}} = \dot{V}_{\mathrm{Y}}(t) = \ddot{y}(t) \quad , \quad A_{\mathrm{Z}} = \dot{V}_{\mathrm{Z}}(t) = \ddot{z}(t) \qquad (44\text{-}1)$$

نلاحظ أن مسقط متجه التسارع على محاور الإحداثيات تساوي إلى المشتقات الأولى لمساقط متجه السرعة على محاور الإحداثيات بالنسبة للزمن، أو المشتقات الثانية لإحداثيات الجسيم بالنسبة للزمن، أي أنها تمثل تسارع مسقط الجسيم المتحرك على محاور الحركة.



(الشكل-1-13)

وإذا كانت إشارة المركبة A_{X} موجبة، فهذا يشير إلى أن اتجاه المركبة الشعاعية $\boldsymbol{A}_{\mathrm{X}}$ هي بالاتجاه الموجب للمحور X ، والإشارة السالبة تعني أنها تتجه بالاتجاه السالب للمحور X ، ونحصل بالطريقة نفسها على اتجاهات المركبات الأخرى بدءاً من إشارة المركبة العددية الموافقة.

أما القيمة العددية لمتجه التسارع $\boldsymbol{A}$ فيمكن الحصول عليه من المركبات القائمة للتسارع:

$$A = (A_{\mathrm{X}}^2 + A_{\mathrm{Y}}^2 + A_{\mathrm{Z}}^2)^{1/2} = (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2)^{1/2} \qquad (45\text{-}1)$$

ووحدات قياس التسارع هي $\mathrm{m/sec}^2$ ، ويمكن أن يكون التسارع موجباً، حالة الجسيم المادي المتسارع، أي أن سرعته تزداد، ويمكن أن يكون سالباً، حالة الجسيم المادي المتباطئ، أي أن سرعته تتناقص.

أما الزوايا التي يصنعها متجه التسارع مع محاور الإحداثيات فهي:

$$\cos(\boldsymbol{A},\boldsymbol{i}) = \frac{A_{\mathrm{X}}}{A} \quad , \quad \cos(\boldsymbol{A},\boldsymbol{j}) = \frac{A_{\mathrm{Y}}}{A} \quad , \quad \cos(\boldsymbol{A},\boldsymbol{k}) = \frac{A_{\mathrm{Z}}}{A} \qquad (46\text{-}1)$$

وكنتيجة إذا علمنا كل من الإحداثيات x,y,z بصورة مستقلة كتابع للزمن وفق العلاقة (1-4)، عندئذ يمكن تركيبها للحصول على المتجه $\boldsymbol{R}\,(t)$ وفق العلاقة (1-12) لأي قيمة للزمن، وبالمثل تركب مشتقاتهم $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ للحصول على المتجه $\boldsymbol{V}$ وفق العلاقة (1-17)، كما تركب مشتقاتهم الثانية $\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}$ للحصول على المتجه $\boldsymbol{A}$ وفق العلاقة (1-45).

وإذا أعطيت مركبات التسارع $A_{\mathrm{X}}\,,A_{\mathrm{Y}}\,,A_{\mathrm{Z}}$ كتوابع للزمن وفق العلاقة (1-44)، جاز أن نكامل كل منهم على حده نسبة إلى الزمن مرة واحدة للحصول على $V_{\mathrm{X}}\,,V_{\mathrm{Y}}\,,V_{\mathrm{Z}}$ وفق العلاقة (1-16)، ومرة أخرى للحصول على معادلات الحركة $x\,,y\,,z$ كتوابع للزمن وفق العلاقة (1-4).

يمكن الاستنتاج من المناقشة السابقة أن التعبير عن الحركة على مسار منحن بالإحداثيات الديكارتية المتعامدة هو في الحقيقة تركيب لثلاثة مركبات لثلاث حركات خطية آنية في الاتجاهات $x\,,y\,,z$.

وإذا أعطيت حركة الجسيم بطريقة الإحداثيات الأسطوانية تكون مركبات التسارع على المحاور $\underline{Z}\,,\underline{\theta}\,,\underline{r}$ الموضحة في (الشكل-1-4b)، هي:

$$A_r = \dot{V}_r(t) = \ddot{r} - r.\dot{\theta}^2 \;,\; A_\theta = \dot{V}_\theta(t) = 2\dot{r}.\dot{\theta} + r.\ddot{\theta} \;,\; A_{\mathrm{Z}} = \dot{V}_{\mathrm{Z}}(t) = \ddot{z} \qquad (47\text{-}1)$$

وتكون القيمة العددية لتسارع الجسيم:

$$A = (A_r^2 + A_\theta^2 + A_{\mathrm{Z}}^2)^{1/2} \qquad (48\text{-}1)$$

وإذا أعطيت حركة الجسيم بطريقة الإحداثيات الكروية تكون مركبات التسارع على المحاور $\underline{\theta}\,,\underline{\varphi}\,,\underline{R}$ الموضحة في (الشكل1-5)، هي:

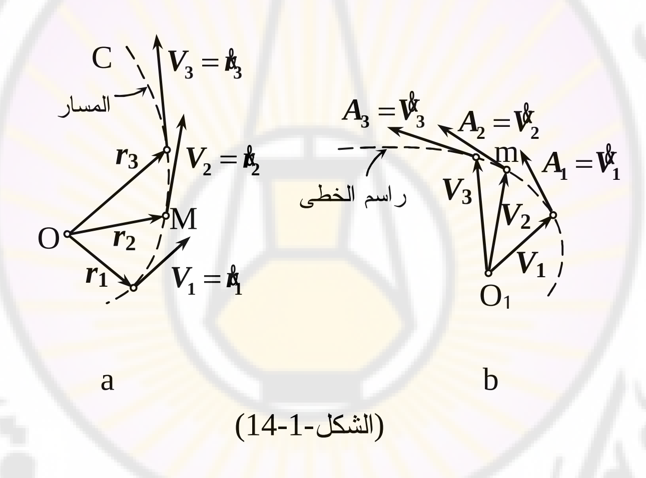
$$\begin{aligned} A_r &= \dot{V}_r(t) = \ddot{R} - R.\dot{\theta}^2 - R.\sin^2\theta\,.\dot{\varphi}^2 \\ A_\varphi &= \dot{V}_\varphi(t) = R.\sin\theta\,.\ddot{\varphi} + 2\sin\theta\,.\dot{R}.\dot{\varphi} + 2R.\cos\theta\,.\dot{\theta}.\dot{\varphi} \qquad (49\text{-}1) \\ A_\theta &= \dot{V}_\theta(t) = R.\ddot{\theta} + 2\dot{R}.\dot{\theta} - R.\sin\theta\,.\cos\theta\,.\dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

وتكون القيمة العددية لتسارع الجسيم:

$$A = (A_R^2 + A_\varphi^2 + A_\theta^2)^{1/2} \qquad (50\text{-}1)$$

6-3- التسارع بالطريقة الطبيعية

لتوضيح التسارع بالطريقة الطبيعية، ننشئ من نقطة ثابتة O_1 المتجه $\mathbf{O_1m}$ المساير لـــ $(V = \dot{r})$ متجه سرعة الجسيم M ، فعندما يتحرك الجسيم على المسار C من خلال ثلاثة مواضع مختارة موضحة في (الشكل-1-14a)، عندئذ ترسم m بتحول الزمن مساراً يدعى بالهودوغراف (*Hodograph*) كما هو مبين في(الشكل-1-14b)، ويعرف باسم راسم خطى حركة الجسيم M ، وسرعة النقطة m هو متجه يساير تسارع الجسيم $(\dot{V} = A)$ وهي باتجاه مماس لراسم الخطى، بالتالي فإن متجه سرعة أي جسيم مادي يكون مماساً على المسار C الذي يرسمه الجسيم في أثناء حركته، بينما متجه التسارع لا يكون مماساً له، وإن العلاقة بين التسارع والسرعة هي نفسها التي بين السرعة ومتجه الموضع.



(الشكل-1-14)

فمن علاقة متجه السرعة (1-27):

$$\boldsymbol{V} = V.\boldsymbol{\tau}$$

ومنه علاقة التسارع:

$$\boldsymbol{A} = \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\boldsymbol{\tau} + V\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \dot{V}.\boldsymbol{\tau} + V\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{V}.\boldsymbol{\tau} + V^2\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$$

بالعودة إلى علاقة فرينية الأولى (1-38):

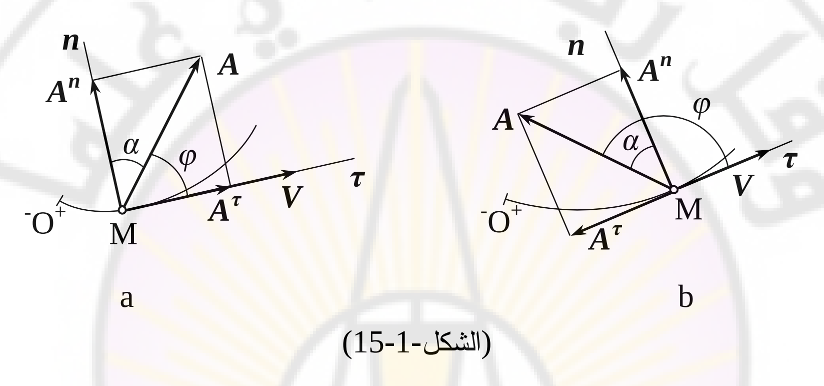
$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{r}\boldsymbol{n}$$

ومنه يمكن أن نكتب:

$$\boldsymbol{A} = \dot{V}.\boldsymbol{\tau} + \frac{V^2}{r}\boldsymbol{n} \qquad (51\text{-}1)$$

فتسارع الجسيم $\boldsymbol{A}$ والحال هذه هو محصلة متجهين:

أحدهما ينطبق على الناظم الأساسي في الموضع M ، ويرمز له بـــ $\boldsymbol{A^n}$ ، ويدعى بالمركبة الناظمية للتسارع (*Normal Acceleration*)، وقيمته العددية $(A^n = V^2 / r)$، وهي تعبر عن التغير في اتجاه الحركة أي سرعة الجسيم، وتتجه دوماً نحو مركز انحناء المسار، أي نحو تقعر المسار لأن $(V^2 / r > 0)$ دوماً، بالتالي فاتجاهها مستقل عن اتجاه الحركة، وعن الاتجاه المعتمد للأقواس المتزايدة.



(الشكل-1-15)

أما الثاني فينطبق على المماس للمسار C في الموضع M ، ويرمز له بـــ $\boldsymbol{A^\tau}$ ، ويدعى بالمركبة المماسية للتسارع (*Tangential Acceleration*)، وقيمته العددية $(A^t = \dot{V} = \ddot{s})$، وهي تعبر عن تغير القيمة العددية لسرعة الجسيم، بالتالي يمكن أن تكون موجبة أو سالبة، وذلك حسب طبيعة السرعة، فإذا كانت متزايدة $(\dot{V} > 0)$ فإنها تتجه باتجاه حركة الجسيم (الشكل-1-15a)، وإذا كانت متناقصة $(\dot{V} < 0)$ فإنها تتجه في اتجاه معاكس لحركة الجسيم (الشكل-1-15b).

ومنه يكتب التسارع الكلي للجسيم بالشكل:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^\tau + \boldsymbol{A}^n \qquad (52\text{-}1)$$

ويقع في المستوى الملاصق للمسار في الموضع M ، وقيمته العددية تعطى بالعلاقة:

$$A = (A_t^2 + A_n^2)^{1/2} = (\dot{V}^2 + \frac{V^4}{r^2})^{1/2} \qquad (53\text{-}1)$$

ويتجه ناحية تقعر المنحنى، ويتحدد انحرافه عن اتجاه الناظم الأساسي M$\boldsymbol{n}$ بالزاوية α التي تعين بالعلاقة:

$$a = \tan^{-1}\frac{|A^t|}{A^n} \qquad (54\text{-}1)$$

تكون الحركة متسارعة في الأوضاع التي يتجه فيها V من جهة A^{τ} ، أي أن سرعتها تزداد بالقيمة المطلقة كما في (الشكل-1-15a)، وفي هذه الحالة يتحقق الجداء السلمي التالي:

$$A.V > 0 \quad \Rightarrow \quad j < p/2$$

بينما تكون الحركة متباطئة، في الأوضاع التي يتجه فيها V عكس جهة A^{τ} أي أن سرعتها تتناقص بالقيمة المطلقة كما في (الشكل-1-15b)، وفي هذه الحالة يتحقق الجداء السلمي التالي:

$$A.V < 0 \quad \Rightarrow \quad j > p/2$$

وتكون الحركة مباشرة، عندما يسير المتحرك في الجهة الموجبة للمسار، أي في جهة الفواصل المتزايدة، وتكون الحركة عكسية عندما يسير المتحرك في الجهة السالبة للمسار، أي في جهة الفواصل المتناقصة.

ويكون تسارع الجسيم المادي معدوماً عندما تساوي كلا المركبتين الصفر، ويمكن أن تؤول إحدى المركبتين A^{τ} أو A^{n} إلى الصفر عند بعض نقاط المسار، حيث تكون ($A^{\tau} = 0$) في النقط التي تحقق عندها العلاقة ($dV/dt = 0$)، أي مثلاً في النقط التي تصل عندها السرعة V إلى قيمتها العظمى أو الصغرى، أو عندما يتحرك الجسيم بسرعة ثابتة على طول المنحني، ولن تكون A^{n} تساوي الصفر إلا إذا مر الجسيم في نقطة انعطاف (*Points of Inflection*) في أثناء حركته، حيث يكون نصف قطر انحناء المسار عندئذ مساوياً لانهاية، أو عندما يكون المنحني خطاً مستقيماً كما هو واضح في (الشكل1-1a).

إن اعتماد مركبة التسارع الناظمية على نصف قطر تقوس المسار الذي يرسمه الجسيم المادي يؤخذ في الحسبان عند تصميم المنشآت، أو التركيبات الآلية التي يوجد فيها اختلاف كبير في تقوس سطوحها كجناح الطائرة، وخطوط السكك الحديدية، والحدبات.

فمن أجل تجنب التغيرات المفاجئة في تسارع جزيئات الهواء المار حول جناح الطائرة يراعى عند تصميم المظهر الجانبي (*Profile*) للأجنحة، تجنب التغيرات المفاجئة في التقوس، ويؤخذ الحذر نفسه في الحسبان عند تصميم الخطوط الحديدية المنحنية ومدها، وذلك لتجنب التغيرات المفاجئة في تسارع العربات الذي يكون قاسياً بالنسبة للعربات، ومزعجاً بالنسبة للركاب، وبالتالي لا يمكن وصل خط مستقيم بخط دائري، وإنما يجب الوصل بين الاثنين دوماً بأجزاء انتقالية تساعد في تخفيف الانتقال وتلطيفه، من نصف قطر مسار لانهائي في حالة الخط الحديدي المستقيم إلى نصف قطر معين للقسم الدائري. الأمر نفسه يطبق عند تصميم الحدبات ذات السرعة العالية، من أجل منع أي تغير حاد في التسارع، وذلك بوضع منحنيات انتقال تؤمن تغيراً مستمراً في التسارع.

7- الحركة بالنسبة لمجموعة إحداثيات تتحرك حركة انسحابية

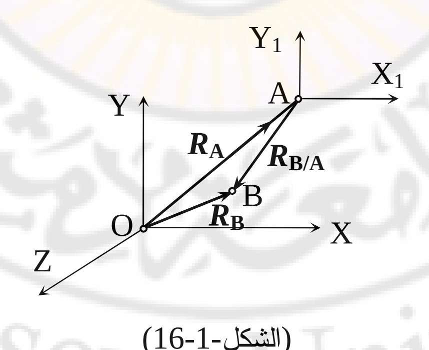
Relative Motion to a Frame in Translation

لقد استخدمنا في الفقرة السابقة من أجل وصف ودراسة حركة الجسيم المادي بالنسبة لمجموعة واحدة من المحاور الإحداثية، وكانت مجموعة الإحداثيات هذه في معظم الحالات مرتبطة بالأرض لذا كانت تعد ثابتة.

ولكن من أجل دراسة حركة بعض الحالات، فمن الأفضل استخدام عدة محاور للإحداثيات في الوقت نفسه، فإذا كانت إحدى هذه المجموعات ترتبط بالأرض سندعوها بمجموعات الإحداثيات الثابتة، بينما سندعو المجموعات الأخرى بمجموعة الإحداثيات المتحركة، ويجب أن لا ننسى أن اختيار أي مجموعة من المحاور كمجموعة ثابتة هي عملية كيفية وافتراضية، إذ إن أي مجموعة يمكن افتراضها ثابتة والبقية تكون متحركة.

ليكن لدينا جسيمان ماديان A و B يتحركان في الفراغ كما في (الشكل-1-16)، يعين متجها الموضع $\boldsymbol{r_A}$ و $\boldsymbol{r_B}$ موضع الجسيمين في أي لحظة زمنية معينة بالنسبة لمجموعة الإحداثيات الثابتة T(OXYZ) .

لنأخذ الآن مجموعة أخرى من الإحداثيات $T_1(AX_1Y_1Z_1)$ تتمركز في الجسيم A وتوازي المجموعة الثابتة T ، بحيث عندما تتحرك نقطة الأصل في المجموعة المتحركة فإن محاورها تبقى على الدوام موازية لمحاور المجموعة الثابتة، وتكون حركة مجموعة الإحداثيات T_1 في هذه الحالة انسحابية (*Translation*) بالنسبة للمجموعة T .



(الشكل-1-16)

نصل الجسيمين A و B بالمتجه $\boldsymbol{R}_{\mathbf{B/A}}$ الذي يعين موضع الجسيم B بالنسبة إلى مجموعة المقارنة المتحركة T_1 ، أو باختصار موضع الجسيم B بالنسبة لـ A ، فمن (الشكل-1-16) نجد:

$$\boldsymbol{R}_{\mathbf{B}} = \boldsymbol{R}_{\mathbf{A}} + \boldsymbol{R}_{\mathbf{B/A}} \qquad (55\text{-}1)$$

باشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للزمن من مجموعة الإحداثيات الثابتة نحصل على:

$$\frac{d\boldsymbol{r}_{\mathbf{B}}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_{\mathbf{A}}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}_{\mathbf{B/A}}}{dt}$$

يمثل المشتقان $d\boldsymbol{r}_{\mathbf{A}}/dt$ و $d\boldsymbol{r}_{\mathbf{B}}/dt$ السرعتين $\boldsymbol{V}_{\mathbf{A}}$ و $\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}}$ على الترتيب، بينما يمثل المشتق $d\boldsymbol{r}_{\mathbf{B/A}}/dt$ معدل تغير $\boldsymbol{r}_{\mathbf{B/A}}$ بالنسبة إلى مجموعة المحاور T_1 ، وأيضا بالنسبة للمحاور الثابتة T ، إذ أن الجملة T_1 تتحرك حركة انسحابية بالنسبة للجملة T ، بالتالي فإن هذا المشتق يعين سرعة الجسيم B بالنسبة للمحاور المتحركة T_1 ، أي $\boldsymbol{V}_{\mathbf{B/A}}$ ، أو باختصار سرعة الجسيم B بالنسبة للجسيم A ، ويعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{A}} + \boldsymbol{V}_{\mathbf{B/A}} \qquad (56\text{-}1)$$

باشتقاق المعادلة مع فرض أن الحد $d\boldsymbol{V}_{\mathbf{B/A}}/dt$ يعين التسارع $\boldsymbol{A}_{\mathbf{B/A}}$ ، تسارع الجسيم B بالنسبة للجملة T_1 ، أو باختصار تسارع الجسيم B بالنسبة للجسيم A ومنه:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{B}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{A}} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{B/A}} \qquad (57\text{-}1)$$

تدعى حركة الجسيم B بالنسبة إلى مجموعة المقارنة الثابتة بالحركة المطلقة (*Absolute Motion*) أو بالحركة المركبة.

بالتالي يمكن الحصول على الحركة المطلقة للجسيم B ، بجمع حركة الجسيم A من الجسم نفسه مع حركة الجسيم B بالنسبة لمجموعة الإحداثيات المرتبطة في A .

تبين المعادلة (1-56) أنه يمكن الحصول على السرعة المطلقة $\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}}$ للجسيم المادي B بواسطة الجمع الشعاعي للسرعتين $\boldsymbol{V}_{\mathbf{A}}$ و $\boldsymbol{V}_{\mathbf{B/A}}$ ، وتعبر المعادلة (1-57) عن خواص التسارع نفسها.

ويجب أن لا ننسى أن حركة مجموعة الإحداثيات المتحركة T_1 هي انسحابية، وسنرى لاحقاً أنه يجب استخدام علاقات مختلفة عند دوران مجموعة الإحداثيات المتحركة.

8- حل مسائل حركة الجسيم

تنحصر مسائل حركة الجسيم في تعيين مسار أو سرعة أو تسارع الجسيم، وكذلك في إيجاد الزمن الذي يقطع خلاله الجسيم مسافة ما، أو إيجاد المسافة المقطوعة خلال فترة زمنية معينة وما شابه ذلك.

ويجب قبل البدء بحل أي مسألة من هذا النوع أن نحدد أولاً حسب أي معادلة يتحرك الجسيم، عند ذلك يمكن أن تنشأ لدينا إحدى الحالتين الآتيتين:

- إما أن تعطى معادلة حركة الجسيم في شروط المسألة، والمطلوب إيجاد مميزات الحركة.

- أو أن لا تعطى معادلة حركة الجسيم، ولكن حركتها تعتمد بشكل معين على حركة معطاة لجسيم آخر أو جسم آخر، وفي هذه الحالة يجب أن تبدأ حل المسألة بإيجاد المعادلات التي تحدد معادلة حركة الجسيم المدروس.

مسألة 1-1-

ادرس حركة جسيم معطى بالمعادلات:

$$x = t^3 - 3t \quad , \quad y = -3t^2 \quad , \quad z = 2(t^3 + 3t)$$

وذلك بإيجاد العلاقة بدلالة الزمن لـــ:

1. المتجه الموضعي للمتحرك.
2. متجه سرعة المتحرك.
3. المسافة التي يقطعها المتحرك.
4. متجه تسارع المتحرك.
5. نصف قطر انحناء المسار.

الحل:

1. تحدد علاقة المتجه الموضعي للمتحرك بالعلاقة (1-12):

$$\boldsymbol{R} = x.\boldsymbol{i} + y.\boldsymbol{j} + z.\boldsymbol{k}$$

منه:

$$\boldsymbol{R} = (t^3 - 3t)\,\boldsymbol{i} - 3t^2.\boldsymbol{j} + 2(t^3 + 3t)\,\boldsymbol{k}$$

2. تحدد علاقة متجه السرعة بالعلاقة (1-15):

$$\boldsymbol{V} = \dot{x}.\boldsymbol{i} + \dot{y}.\boldsymbol{j} + \dot{z}.\boldsymbol{k} = V_X.\boldsymbol{i} + V_Y.\boldsymbol{j} + V_Z.\boldsymbol{k}$$

حيث:

$$V_X = \dot{x} = 3\,t^2 - 3 \quad , \quad V_Y = \dot{y} = -6\,t \quad , \quad V_Z = \dot{z} = 2(3\,t^2 + 3)$$

منه:

$$\boldsymbol{V} = (3t^2 - 3)\,\boldsymbol{i} - 6\,t.\boldsymbol{j} + 2(3t^2 + 3)\,\boldsymbol{k}$$

وعلاقة قيمته العددية تعطى بالعلاقة (1-17):

$$V = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}$$

وتساوي إلى:

$$V = [45(t^2+1)^2]^{1/2} = 3\sqrt{5}(t^2+1)$$

أما علاقة زاوية ميل متجه السرعة تعطى بالعلاقة (1-18)، فعلى المحور OX هي:

$$a = \cos^{-1}\frac{V_X}{V} = \cos^{-1}\frac{3(t^2-1)}{3\sqrt{5}(t^2+1)} = \cos^{-1}\frac{t^2-1}{\sqrt{5}(t^2+1)}$$

وعلى المحور OY هي:

$$b = \cos^{-1}\frac{V_Y}{V} = \cos^{-1}\frac{-6t}{3\sqrt{5}(t^2+1)} = \cos^{-1}\frac{-2t}{\sqrt{5}(t^2+1)}$$

وعلى المحور OZ هي:

$$g = \cos^{-1}\frac{V_Z}{V} = \cos^{-1}\frac{6(t^2+1)}{3\sqrt{5}(t^2+1)} = \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$$

نلاحظ أن ميل متجه السرعة، أي ميل المماس للمسار في جميع نقاطه يصنع مع المحور OZ زاوية ثابتة، بالتالي المسار هو عبارة عن لولب مرسوم على أسطوانة قائمة محورها يوازي المحور OZ .

3. تحدد معادلة المسافة بالعلاقة (1-29):

$$s - s_0 = \int_{t_0}^{t} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}.dt$$

بالتعويض:

$$s - s_0 = \int_{t_{0=0}}^{t} 3\sqrt{5}(1+t^2)dt$$

منه:

$$s = \sqrt{5}(3t + t^3) + s_0$$

غير أنه في اللحظة ($t = 0$) يكون:

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad s_0 = 0$$

منه علاقة المسافة:

$$s = \sqrt{5}(3t + t^3)$$

4. تحدد علاقة متجه التسارع بالعلاقة (1-43):

$$\boldsymbol{A} = \ddot{x}.\boldsymbol{i} + \ddot{y}.\boldsymbol{j} + \ddot{z}.\boldsymbol{k} = A_X.\boldsymbol{i} + A_Y.\boldsymbol{j} + A_Z.\boldsymbol{k}$$

حيث:

$$A_X = \ddot{x} = 6t \quad , \quad A_Y = \ddot{y} = -6 \quad , \quad A_Z = \ddot{z} = 12t$$

منه:

$$\boldsymbol{A} = 6t.\boldsymbol{i} - 6\,\boldsymbol{j} + 12t.\boldsymbol{k}$$

وعلاقة قيمته العددية تعطى بالعلاقة (1-45):

$$A = (A_X^2 + A_Y^2 + A_Z^2)^{1/2} = (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2)^{1/2}$$

وتساوي إلى:

$$A = 6(5t^2 + 1)^{1/2}$$

أما علاقة زاوية ميل متجه التسارع، فعلى المحور OX هي:

$$a_1 = \cos^{-1}\frac{A_X}{A} = \cos^{-1}\frac{6t}{6(5t^2+1)^{1/2}} = \cos^{-1}\frac{t}{(5t^2+1)^{1/2}}$$

وعلى المحور OY فهي:

$$b_1 = \cos^{-1}\frac{A_Y}{A} = \cos^{-1}\frac{-6}{6(5t^2+1)^{1/2}} = \cos^{-1}\frac{-1}{(5t^2+1)^{1/2}}$$

وعلى المحور OZ فهي:

$$g_1 = \cos^{-1}\frac{A_Z}{A} = \cos^{-1}\frac{12t}{6(5t^2+1)^{1/2}} = \cos^{-1}\frac{2t}{(5t^2+1)^{1/2}}$$

5. وتحدد علاقة نصف قطر الانحناء من علاقة التسارع الناظمي:

$$A^n = \frac{V^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{V^2}{A^n}$$

حيث التسارع الناظمي يحسب من العلاقة (1-53):

$$A^2 = A_t^2 + A_n^2 \quad \Rightarrow \quad A^n = (A^2 - A_t^2)^{1/2}$$

والتسارع المماسي يحسب من العلاقة:

$$A^t = \dot{V} = 6\sqrt{5}\,t$$

بالتعويض نحسب التسارع الناظمي:

$$A^n = [36(5t^2+1) - 36(5t^2)]^{1/2} = 6 \text{ m/s}^2$$

ومنه علاقة نصف قطر الانحناء:

$$r = \frac{45(t^2+1)}{6} = \frac{15}{2}(t^2+1)$$

9- الحركة المنحنية المستوية لجسيم مادي

Curvilinear Plane Motion of a Particle

لقد تم دراسة الحالة العامة للحركة ثلاثية الأبعاد لجسيم على مسار منحنٍ في الفراغ، وتم بحث نظام الإحداثيات الديكارتية المتعامدة $x\ ,\ y\ ,\ z$ ، أما الإحداثيات الأسطوانية $r\ ,\ \theta\ .\ z$ فإنها تستعمل عادة لوصف الحركة اللولبية لجسيم التي ستقدم في الفصل الثاني، والإحداثيات الكروية $\theta\ ,\ \varphi\ ,\ R$ ، فإنها تستعمل عادة لوصف الحركة الكروية لجسيم عند تحديد موضعه بواسطة المسافة نصف القطرية R ، والزاويتين $\theta ,\ \varphi$.

1-9- الحركة المستوية بالإحداثيات الديكارتية

إن الانتقال من نظام ثلاثي الأبعاد إلى نظام ذي البعدين لا يؤدي إلى أي صعوبات عملية، فإذا كانت حركة الجسيم في مستوى واحد دائماً مثل OXY ، فإن معادلات الحركة بالإحداثيات الديكارتية تعطى بـــ:

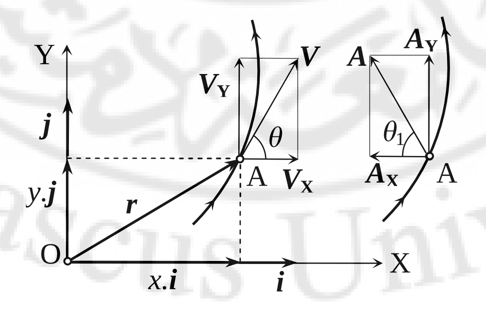
$$x = f_1(t) \qquad\qquad y = f_2(t) \qquad\qquad (58\text{-}1)$$

حيث إننا ننقص فقط الإحداثي z من معادلات الحركة، وكذلك مشتقاته الزمنية في علاقة المتجه الموضعي (1-12)، وعلاقة متجه السرعة (1-15)، وعلاقة متجه التسارع (1-43)، حيث تصبح:

$$\boldsymbol{r} = x.\boldsymbol{i} + y.\boldsymbol{j} \qquad (59\text{-}1)$$

$$\boldsymbol{V} = \dot{x}.\boldsymbol{i} + \dot{y}.\boldsymbol{j} = \boldsymbol{V}_{\mathrm{X}} + \boldsymbol{V}_{\mathrm{Y}} = V_{\mathrm{X}}.\boldsymbol{i} + V_{\mathrm{Y}}.\boldsymbol{j} \qquad (60\text{-}1)$$

$$\boldsymbol{A} = \ddot{x}.\boldsymbol{i} + \ddot{y}.\boldsymbol{j} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{X}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{Y}} = A_{\mathrm{X}}.\boldsymbol{i} + A_{\mathrm{Y}}.\boldsymbol{j} \qquad (61\text{-}1)$$



(الشكل-1-17)

الموضحة في (الشكل-1-17) وقيمها العددية:

$$V=(V_{\mathrm{X}}^2+V_{\mathrm{Y}}^2)^{1/2}=(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2} \qquad \tan q=V_{\mathrm{Y}}/V_{\mathrm{X}} \qquad (62\text{-}1)$$

$$A=(A_{\mathrm{X}}^2+A_{\mathrm{Y}}^2)^{1/2}=(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2)^{1/2} \qquad \tan q_1=A_{\mathrm{Y}}/A_{\mathrm{X}} \qquad (63\text{-}1)$$

مسألة -1-2

يتحرك جسيم على منحنٍ بحيث كان متجه الموضع له في M معطى بالعلاقة:

$$\mathbf{OM}=\boldsymbol{r}=20\,t.\boldsymbol{i}+(12\,t-5\,t^2)\,\boldsymbol{j}$$

المطلوب تحديد:

1. معادلة المسار.
2. متجه السرعة - السرعة الابتدائية – السرعة بعد مرور زمن قدره ($t = 10$ s).
3. متجه التسارع.

الحل:

1. تحدد معادلة المسار من علاقة المتجه الموضعي للجسيم حيث نلاحظ أن المسار المنحني يقع في المستوي OXY ، وأن معادلات حركة الجسيم هي:

$$x=20t \qquad , \qquad y=12t-5t^2$$

بحذف الزمن t بينهما ينتج:

$$y=12\frac{x}{20}-5\left(\frac{x}{20}\right)^2=\frac{3}{5}x-\frac{x^2}{80}$$

تمثل هذه العلاقة معادلة المسار $y = f(x)$.

2. تحدد علاقة متجه السرعة من العلاقة (1-60):

$$\boldsymbol{V}=\dot{x}.\boldsymbol{i}+\dot{y}.\boldsymbol{j}=V_{\mathrm{X}}.\boldsymbol{i}+V_{\mathrm{Y}}.\boldsymbol{j}$$

حيث:

$$V_{\mathrm{X}}=\dot{x}=20=\text{const} \qquad , \qquad V_{\mathrm{Y}}=\dot{y}=12-10t$$

نلاحظ أن حركة مسقط الجسيم على المحور X هي حركة مستقيمة منتظمة، وأن حركة مسقط الجسيم على المحور Y هي حركة مستقيمة متغيرة بانتظام.

وبالتعويض نحصل على علاقة السرعة:

$$\boldsymbol{V}=20.\boldsymbol{i}+(12-10t)\,\boldsymbol{j}$$

أما القيمة العددية للسرعة الابتدائية ($t = 0$)، فتحدد مركباتها كما يلي:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{0X} = 20 \text{ m/sec} \quad , \quad V_{0Y} = 12 \text{ m/sec}$$

بالتالي:

$$V_0 = (V_{0X}^2 + V_{0Y}^2)^{1/2} = [(20)^2 + (12)^2]^{1/2} = 4\sqrt{34} \text{ m/sec}$$

والقيمة العددية للسرعة عند ($t = 10$ sec)، فتحدد مركباتها كما يلي:

$$t = 10 \text{ sec} \Rightarrow (V_X)_{t=10} = 20 \text{ m/sec} \quad , \quad (V_Y)_{t=10} = 12 - 100 = -88 \text{ m/sec}$$

بالتالي:

$$V_{t=10} = [(V_X)_{t=10}^2 + (V_Y)_{t=10}^2]^{1/2} = [(20)^2 + (-88)^2]^{1/2} = 90.24 \text{ m/sec}$$

وتميل السرعة على الأفق بزاوية:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{V_Y}{V_X} = \tan^{-1}\frac{-88}{20} = \tan^{-1}(-4.4) = 102.8^{\circ}$$

3. تحدد علاقة متجه التسارع من العلاقة (1-61):

$$\boldsymbol{A} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}.\boldsymbol{j} = A_X.\boldsymbol{i} + A_Y.\boldsymbol{j}$$

حيث:

$$A_X = \ddot{x} = 0 \quad , \quad A_Y = -10 \text{ m/sec}^2$$

بالتالي:

$$A = A_Y = -10 \text{ m/sec}^2$$

أي أن التسارع ثابت في المقدار والاتجاه وقيمته العددية 10 m/sec^2 ويتجه دوماً عكس اتجاه المحور Y .

مسألة 1-3-

إذا كانت معادلات الحركة لمركز ثقل طائرة شراعية تهبط هبوطاً حراً مع سرعة أفقية مقدارها U هي:

$$x = U.t \quad , \quad y = h - g\frac{t^2}{2}$$

حيث U, g, h هي ثوابت. المطلوب تعيين:

1. مسار مركز الثقل في الوضع العام M وسرعته وتسارعه.
2. التسارع المماسي والناظمي ونصف قطر التقوس للمسار في الوضع العام M بدلالة السرعة في هذا الوضع.

الحل:

1. لإيجاد المسار نحذف الزمن t من معادلتي الحركة،

فمن المعادلة الأولى:

$$t = \frac{x}{U}$$

نعوض في المعادلة الثانية:

$$y = h - \frac{g}{2U^2}x^2$$

نحصل على معادلة مسار مركز ثقل الطائرة وهو قطع مكافئ.

ولإيجاد علاقة السرعة نشتق معادلتي الحركة:

$$\dot{x} = V_X = U \qquad , \qquad \dot{y} = V_Y = -g.t$$

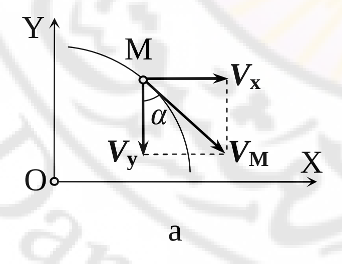
نحصل على مركبتي السرعة الموضحة في (الشكل-1-18a).

منه علاقة سرعة مركز ثقل الطائرة:

$$V = (V_X^2 + V_Y^2)^{1/2} = [U^2 + g^2.t^2]^{1/2}$$

وفي لحظة البدء عند ($t = 0$)، فإن سرعة مركز الثقل تساوي إلى ($V_0 = U$) حيث تزداد باستمرار مع الزمن، وتميل السرعة على الشاقول بمقدار:

$$a = \tan^{-1}\frac{V_X}{|V_Y|} = \tan^{-1}\frac{U}{g.t}$$



(الشكل-1-18)

2. ولإيجاد التسارع نشتق مركبات السرعة:

$$\ddot{x} = \dot{V}_X = A_X = 0 \qquad , \qquad \ddot{y} = \dot{V}_Y = A_Y = -g$$

منه تسارع مركز ثقل الطائرة له مركبة شاقولية فحسب، تتجه نحو الأسفل والموضحة في (الشكل-1-18b) وقيمتها العددية:

$$A = A_Y = -g \ \ \mathrm{m/s^2}$$

نلاحظ أنه لدينا في هذه الحالة مركبة واحدة للتسارع بقيمة ثابتة، وباتجاه ثابت يوازي المحور Y ، ومع أن ($A = \text{const}$) فإن حركة الجسيم المادي ليست متغيرة بانتظام، لأن شروط الحركة المتغيرة بانتظام هو كون ($A^{\tau} = \text{const}$) وليس ($A = \text{const}$)، لكن في حالتنا هذه سنجد أن ($A^{\tau} \neq \text{const}$).

لإيجاد التسارع المماسي لدينا:

$$A^t = \dot{V} = \frac{g^2.t}{(U^2 + g^2.t^2)^{1/2}}$$

نحسب t من علاقة السرعة حيث لدينا:

$$V^2 = U^2 + g^2.t^2 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{1}{g}(V^2 - U^2)^{1/2}$$

بتعويض قيمة t نحصل على:

$$A^t = g(1 - \frac{U^2}{V^2})^{1/2} \neq \text{const}$$

ينتج عن ذلك أنه في اللحظة ($t = 0$) و ($V_0 = U$) ينتج أن ($A^{\tau} = 0$)، بعد ذلك يزداد مع قيمة V ، وعندما ($V = \infty$) فإن ($A^{\tau} = g$)، وهكذا فإن التسارع المماسي يقترب من التسارع الكلي.

ولإيجاد التسارع الناظمي لدينا من العلاقة (1-53):

$$A^2 = A_n^2 + A_t^2 \quad \Rightarrow \quad A_n^2 = A^2 - A_t^2 = g^2 - g^2(1 - \frac{U^2}{V^2}) = \frac{U^2}{V^2} g^2$$

منه:

$$A^n = (U / V)\, g$$

ينتج عن ذلك أنه في اللحظة ($t = 0$) و ($V_0 = U$) ينتج أن ($A^n = g$)، بعد ذلك تتناقص مع قيمة V ، وعندما ($V = \infty$) فإن ($A^n = 0$)، وهكذا فإن قيمة التسارع الناظمي في النهاية تقترب من الصفر.

ولإيجاد نصف قطر التقوس ρ للمسار لدينا:

$$A^n = V^2 / r \qquad \Rightarrow \qquad r = V^2 / A^n = V^3 / U.g$$

ينتج عن ذلك أنه في اللحظة ($t = 0$) و ($V_0 = U$) تكون ρ أصغر ما يمكن، بعد ذلك يزداد مع قيمة V ، وبازدياد السرعة ($V \to \infty$) فإن ρ تزداد ($\rho \to \infty$)، بالتالي التقوس ينقص $[(1/r) \to 0]$.

مسألة 4-1-

قطار يسير على سكة حديدية في إحدى المنعطفات، نصف قطر تقوسه ($\rho = 500\ \ m$) عندما كانت سرعته ($V_1 = 90\ \ km/h$). طبقت الفرامل فجأةً فسببت تباطؤ القطار بنسبة ثابتة، وبعد انقضاء ست ثوان من تطبيق الفرامل انخفضت سرعته إلى ($V_2 = 60\ \ km/h$)، المطلوب تعيين تسارع هذا القطار تماما بعد تطبيق الفرامل.

الحل:

يعطى التسارع المماسي الموضح في (الشكل-1-19) بالعلاقة:

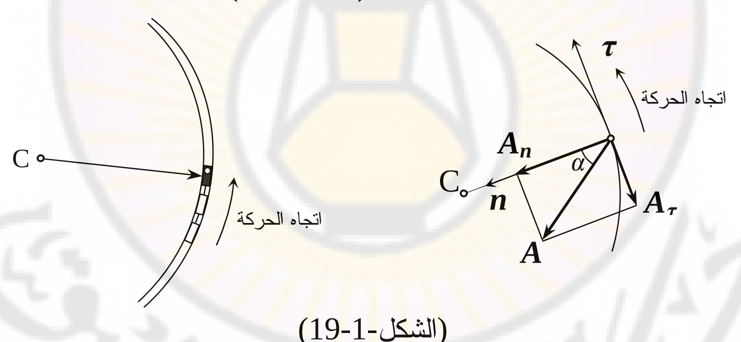
$$A^t = \dot{V} = \Delta V / \Delta t = (V_2 - V_1)/t$$

حيث:

$$V_1 = 90\ \text{km/h} = 90 \times 1000/3600 = 25\ \text{m/sec}$$
$$V_2 = 60\ \text{km/h} = 60 \times 1000/3600 = 16.7\ \text{m/sec}$$

ومنه بالتعويض:

$$A^t = (16.7 - 25)/6 = -1.38\ \text{m/s}^2$$



(الشكل-1-19)

أما التسارع الناظمي الموضح في (الشكل-1-19) فيعطى بالعلاقة:

$$A^n = V_1^2 / r = (25)^2/500 = 1.25\ \text{m/sec}^2$$

والتسارع الكلي يعطي بالعلاقة:

$$A = (A_t^2 + A_n^2)^{1/2}$$

بالتعويض بالقيم العددية:

$$A = 1.86\ \text{m/sec}^2$$

وميل التسارع الكلي على الناظم:

$$a = \tan^{-1}\frac{|A^t|}{A^n} = \tan^{-1}\frac{1.38}{1.25} = \tan^{-1}1.104 = 47.83^\circ$$

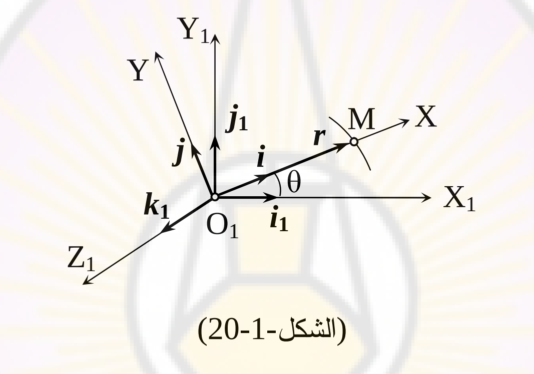
2-9- الحركة المستوية في الإحداثيات القطبية

Plane Curvilinear Motion in Polar Coordinates

عندما يتحرك جسيم طوال الوقت في مستوي واحد مثل OXY ، فإن معادلات الحركة بالإحداثيات الاسطوانية المعينة بالعلاقات (1-5) تؤول إلى:

$$r = f_1(t) \qquad q = f_2(t) \qquad (64\text{-}1)$$

حيث تم فحسب حذف الإحداثية z من معادلات الحركة، وإبقاء الإحداثيتين $r\ ,\ \theta$ اللتين تتغيران في أثناء حركة الجسيم بتغير الزمن، وبواسطتهما يمكن تحديد موضع الجسيم المتحرك في المستوي OXY ، وتدعى بالإحداثيات القطبية، والعلاقتان (1-64) تمثلان معادلات حركة الجسيم بالإحداثيات القطبية.



(الشكل-1-20)

لتوضيح الحركة نعد جسيم M يتحرك بدلالة جملة إحداثية قائمة مباشرة $T_1(O_1X_1Y_1Z_1)$ ، والمتجهات الواحدية لمحاورها هي $\boldsymbol{i_1}\ ,\ \boldsymbol{j_1}\ ,\ \boldsymbol{k_1}$ ، حيث يرسم مساراً مستوياً يقع في المستوي $O_1X_1Y_1$ كما في (الشكل-1-20)، حيث يكون:

$$\mathbf{O_1M} = \boldsymbol{r}\ (t)$$

كما نعد أيضاً جملة إحداثيات مستوية $T(O_1XY)$ قائمة مباشرة، والمتجهات الواحدية لمحاورها هي $\boldsymbol{i}\ ,\ \boldsymbol{j}$ ، حيث ينطبق مستويها على المستوي $O_1X_1Y_1$ ، وينطبق فيها O_1X على $\mathbf{O_1M}$ ، فعندما تتحرك M على مسارها يدور المحور O_1X زاوية θ حول المحور O_1Z_1 العمودي على مستوى الحركة في المبدأ O_1 كما في (الشكل-1-20)، بحيث يكون:

$$O_1X \wedge O_1X_1 = q\ (t)$$

عندئذ تكون الإحداثيتان القطبيتان للجسيم M هما:

$$q = f_2(t) \qquad r = f_1(t)$$

من (الشكل-1-20) يمكن تعيين العلاقة التي تربط بين المتجهين الواحديين للمحورين O_1X و O_1Y ، وذلك من الشكل:

$$\boldsymbol{i} = \cos\theta.\boldsymbol{i_1} + \sin\theta.\boldsymbol{j_1} \quad , \quad \boldsymbol{j} = -\sin\theta.\boldsymbol{i_1} + \cos\theta.\boldsymbol{j_1} \qquad (65\text{-}1)$$

نشتق بدلالة الزاوية θ نحصل على:

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{d\theta} = \boldsymbol{j} \quad , \quad \frac{d\boldsymbol{j}}{d\theta} = -\boldsymbol{i} \qquad (66\text{-}1)$$

وتعني العلاقة (1-66) أن مشتق المتجه الواحدي للمحور المتحرك بدلالة زاويته القطبية هو متجه واحدي يعامده مباشرة $\pi/2$.

وإذا اشتقينا بدلالة الزمن t نحصل على:

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{i}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}.\boldsymbol{j} \quad , \quad \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{j}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}.\boldsymbol{i} \qquad (67\text{-}1)$$

يرمز عادة لـــ $\dot{\theta}$ بـــ ω وتدعى بالسرعة الزاوية لدوران المتجه **OM** حول O .

9-2-1- السرعة في الإحداثيات القطبية

من (الشكل-1-20) يمكننا أن نحدد موضع الجسيم بالعلاقة:

$$\mathbf{O_1M} = r.\boldsymbol{i}$$

نشتق بدلالة الزمن t :

$$\boldsymbol{V} = \frac{\mathbf{dM}}{dt} = \dot{r}.\boldsymbol{i} + r.\dot{\theta}.\boldsymbol{j} \qquad (68\text{-}1)$$

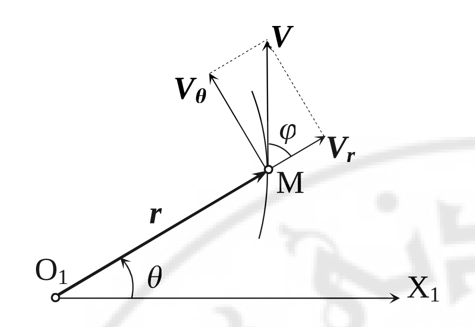
وتصبح سرعة الجسيم الماسة للمسار في M هي محصلة مركبتين كما في (الشكل-1-21a):

المركبة الأولى $\dot{r}.\boldsymbol{i}$ حاملها نصف قطر المتجه $\mathbf{O_1M}$ ، وقيمتها العددية $\dot{r}$ ، وتمثل معدل استطالة المتجه $\boldsymbol{r}$ ، ويرمز لها بـــ $\boldsymbol{V_r}$ ، وتدعى هذه المركبة بالسرعة القطرية (*Radial Velocity*).

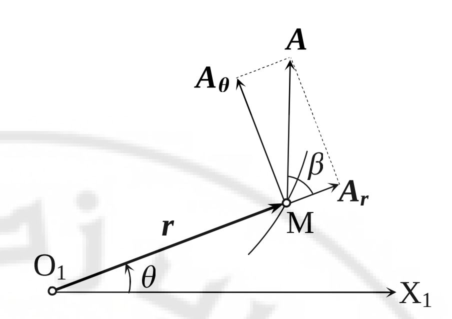
والمركبة الثانية $r.\dot{\theta}.\boldsymbol{j}$ تتعامد مع المركبة القطرية، وقيمتها العددية بدلالة محور يوازي O_1Y هو $r.\dot{\theta}$ ، وتنتج عن دوران المتجه $\boldsymbol{r}$ ، ويرمز لها بـــ $\boldsymbol{V_\theta}$ ، وتدعى هذه المركبة بالسرعة العرضانية (*Transverse Velocity*).

ومنه:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V_r} + \boldsymbol{V_\theta} \qquad (69\text{-}1)$$



a



b

(الشكل-1-21)

أما القيمة العددية للسرعة:

$$V=(V_r^2+V_\theta^2)^{1/2}=(\dot{r}^2+r^2.\dot{\theta}^2)^{1/2} \qquad (70\text{-}1)$$

وإذا رمزنا بـــ φ للزاوية $(\mathbf{O_1X}\ \hat{}\ \boldsymbol{V}=\varphi)$، كان:

$$\tan\varphi=\frac{V_\theta}{V_r}=r\frac{d\theta}{dr} \qquad (71\text{-}1)$$

وتحدد العلاقة (1-71) منحى المماس للمسار في الموضع M .

9-2-2- التسارع في الإحداثيات القطبية

باشتقاق العلاقة (1-68) بدلالة الزمن:

$$\boldsymbol{A}=\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}=\ddot{r}.\boldsymbol{i}+\dot{r}\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}+\dot{r}.\dot{\theta}.\boldsymbol{j}+r.\ddot{\theta}.\boldsymbol{j}+r.\dot{\theta}.\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}$$

$$\boldsymbol{A}=\ddot{r}.\boldsymbol{i}+\dot{r}.\dot{\theta}.\boldsymbol{j}+\dot{r}.\dot{\theta}.\boldsymbol{j}+r.\ddot{\theta}.\boldsymbol{j}-r.\dot{\theta}^2.\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{A}=(\ddot{r}-r.\dot{\theta}^2)\boldsymbol{i}+(2\dot{r}.\dot{\theta}+r.\ddot{\theta})\boldsymbol{j} \qquad (72\text{-}1)$$

نحصل على أن تسارع الجسيم M هو محصلة مركبتين كما في (الشكل-1-21b):

المركبة الأولى $(\ddot{r}-r.\dot{\theta}^2)\boldsymbol{i}$ حاملها نصف القطر الموضعي وقيمتها العددية $(\ddot{r}-r.\dot{\theta}^2)$، وتدعى هذه المركبة بالمركبة القطرية، ويرمز لها بـــ $\boldsymbol{A_r}$.

والمركبة الثانية $(2\dot{r}.\dot{\theta}+r.\ddot{\theta})\boldsymbol{j}$ فهي تعامد المركبة القطرية وقيمتها العددية $(2\dot{r}.\dot{\theta}+r.\ddot{\theta})$، وتدعى هذه المركبة بالمركبة العرضانية، ويرمز لها بـــ A_θ .

ومنه:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A_r}+\boldsymbol{A_\theta} \qquad (73\text{-}1)$$

أما القيمة العددية للتسارع:

$$A = (A_r^2 + A_\theta^2)^{1/2} = [(\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{r}.\dot{\theta} + r.\ddot{\theta})]^{1/2} \qquad (74\text{-}1)$$

وإذا رمزنا بـــ β للزاوية $(\mathbf{O_1X} \wedge \boldsymbol{A} = \beta)$ كان:

$$\tan \beta = \frac{A_\theta}{A_r} \qquad (75\text{-}1)$$

وتحدد العلاقة (1-71) منحى التسارع على نصف القطر الموضعي أي على المركبة القطرية في الموضع M .

9-2-3- حالات خاصة

تتجلى ميزة الإحداثيات القطبية عندما ندرس الحركة المقيدة لجسيم وذلك للتحكم بالمسافة نصف القطرية r ، والوضع الزاوي θ ، أو عندما ندرس الحركة الغير مقيدة لجسيم لقياس المسافة نصف القطرية والوضع الزاوي، وكحالات خاصة:

- إذا كانت حركة دوران المحور O_1X حركة منتظمة، أي $(\dot{\theta} = \text{const})$، بالتالي $(\ddot{\theta} = 0)$، كان عندها:

$$\boldsymbol{A_r} = (\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2)\boldsymbol{i} \quad , \quad \boldsymbol{A_\theta} = 2\dot{r}.\dot{\theta}.\boldsymbol{j} \qquad (76\text{-}1)$$

- إذا تحرك الجسيم M على مسار دائري بنصف قطر ثابت $(r = \text{const})$، كان عندها:

$$\boldsymbol{V_r} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{V_\theta} = r.\dot{\theta}.\boldsymbol{j} \qquad (77\text{-}1)$$

$$\boldsymbol{A_r} = -r.\dot{\theta}^2.\boldsymbol{i} \quad , \quad \boldsymbol{A_\theta} = r.\ddot{\theta}.\boldsymbol{j}$$

- إذا تحرك الجسيم M على مسار دائري حركة دائرية منتظمة، أي $(\dot{\theta} = \text{const})$ و $(r = \text{const})$، كان عندها:

$$\boldsymbol{A_r} = -r.\dot{\theta}^2.\boldsymbol{i} \quad , \quad \boldsymbol{A_\theta} = 0 \qquad (78\text{-}1)$$

وينطبق عندها التسارع الكلي $\boldsymbol{A}$ في هذه الحالة على نصف قطر الدائرة ويتجه نحو مركزها، ويدعى بالتسارع النابذ (*Centrifuge*).

مسألة 5-1-5

يتحرك جسيم مادي في مستوي ويرسم مساراً منحنياً وفق المعادلات:

$$r = b.e^{\theta} \qquad , \qquad \theta = \omega.t$$

حيث b و ω ثوابت، المطلوب تحديد علاقة:

1. كل من متجه السرعة ومتجه التسارع.
2. نصف قطر تقوس المسار.

الحل:

1. إن القيمة العددية لمتجه السرعة تعطى بـــ:

$$V^2 = V_r^2 + V_\theta^2 = \dot{r}^2 + r^2.\dot{\theta}^2$$

حيث:

$$\dot{\theta} = \omega \qquad , \qquad \dot{r} = b.e^{\theta}.\dot{\theta} = b.\omega.e^{\theta}$$

منه المركبة القطرية للسرعة:

$$V_r = \dot{r} = b.\omega.e^{\theta}$$

والمركبة العرضانية للسرعة:

$$V_\theta = r.\dot{\theta} = b.\omega.e^{\theta}$$

بالتعويض:

$$V^2 = b^2.\omega^2.e^{2\theta} + b^2.\omega^2.e^{2\theta} = 2b^2.\omega^2.e^{2\theta}$$

ومنه علاقة القيمة العددية للسرعة:

$$V = \sqrt{2}|b.\omega|e^{\theta}$$

ويميل متجه السرعة على المتجه الموضعي بزاوية φ تعطى بالعلاقة:

$$\varphi_V = \tan^{-1}\frac{V_\theta}{V_r} = \tan^{-1}1 = 45^{\circ}$$

أما علاقة القيمة العددية لمتجه التسارع فتعطى بـــ:

$$A = (A_r^2 + A_\theta^2)^{1/2} = [(\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{r}.\dot{\theta} + r.\ddot{\theta})^2]^{1/2}$$

حيث:

$$\ddot{\theta} = 0 \qquad , \qquad \ddot{r} = b.\omega.e^{\theta}.\dot{\theta} = b.\omega^2.e^{\theta}$$

منه المركبة القطرية للتسارع:

$$A_r = \ddot{r} - r.\dot{\theta}^2 = b.\omega^2.e^{\theta} - b.\omega^2.e^{\theta} = 0$$

والمركبة العرضية للتسارع:

$$A_{\theta} = 2\dot{r}.\dot{\theta} + r.\ddot{\theta} = 2b.\omega^2.e^{\theta}$$

بالتعويض نحصل على علاقة القيمة العددية لمتجه التسارع:

$$A = (A_{\theta}^2)^{1/2} = 2|b|\omega^2.e^{\theta}$$

ويميل متجه التسارع على المتجه الموضعي بزاوية φ تعطى بالعلاقة:

$$\varphi_A = \tan^{-1}\frac{A_{\theta}}{A_r} = \tan^{-1}\infty = \pi/2$$

أي أن متجه التسارع عمودي على المتجه الموضعي.

2. لإيجاد علاقة نصف قطر تقوس المسار، نعلم أن القيمة العددية لمتجه التسارع يعطى أيضاً بالعلاقة (1-53):

$$A^2 = A_t^2 + A_n^2 = \dot{V}^2 + \frac{V^4}{\rho^2}$$

حيث المركبة المماسية للتسارع:

$$A_t = \dot{V} = \sqrt{2}|b.\omega|e^{\theta}.\dot{\theta} = \sqrt{2}b.\omega^2.e^{\theta} \quad \Rightarrow \quad A_t^2 = 2b^2.\omega^4.e^{2\theta}$$

والمركبة الناظمية للتسارع:

$$A_n^2 = \frac{V^4}{\rho^2} = \frac{4b^4.\omega^4.e^{4\theta}}{\rho^2}$$

بالتعويض:

$$4b^2.\omega^4.e^{2\theta} = 2b^2.\omega^4.e^{2\theta} + \frac{4b^4.\omega^4.e^{4\theta}}{\rho^2}$$

ومنه تكون علاقة نصف قطر تقوس المسار:

$$\rho = \sqrt{2}|b|e^{\theta}$$

مسألة -1-6

يدور الذراع OA حول المفصل الثابت O تبعاً للعلاقة:

$$q = 0.15t^2$$

حيث θ تقاس بالتقدير الدائري، و t تقاس بالثواني.

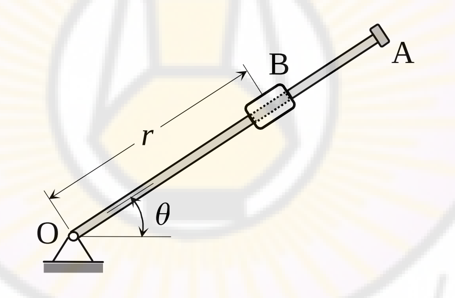
بينما ينزلق الجسيم B على الذراع أثناء دورانه بحيث يكون بعده عن المركز O تبعاً للعلاقة:

$$r = 3 - 0.4t^2$$

حيث r بالمتر و t بالثواني.

المطلوب عند الوضع المبين في (الشكل-1-22)، إيجاد سرعة الجسيم B وتسارعه، بعد أن يدور الذراع OA زاوية ($\theta = 30^o$) باتجاه معاكس لدوران عقارب الساعة.

الحل:



(الشكل-1-22)

تعطى القيمة العددية لسرعة الجسيم B بـــ:

$$V_B^2 = V_r^2 + V_q^2 = \dot{r}^2 + r^2 . \dot{\theta}^2$$

لحساب مركبات السرعة نحسب زمن الحركة، حيث لدينا:

$$q = 30^o = 0.524 \text{ rad}$$

بالتعويض في معادلة الحركة:

$$q = 0.524 = 0.15t^2$$

ومنه زمن الحركة:

$$t = 1.869 \text{ sec}$$

بالاشتقاق مرتين لعلاقة θ مع التعويض نحصل على:

$$\dot{\theta} = 0.3t = 0.561\,\text{rad/sec} \quad , \quad \ddot{\theta} = 0.3\,\text{rad/sec}^2$$

بالتعويض عن زمن الحركة في علاقة r ، نحصل على:

$$r = 3 - 0.4t^2 = 1.603\ \text{m}$$

بالاشتقاق مرتين لعلاقة r مع التعويض، نحصل على:

$$\dot{r} = -0.8t = -1.495\ \text{m/sec} \quad , \quad \ddot{r} = \text{-}0.8\ \text{m/sec}^2$$

ومنه مركبة السرعة القطرية:

$$V_r = \dot{r} = -1.495\ \text{m/sec}$$

ومركبة السرعة العرضانية:

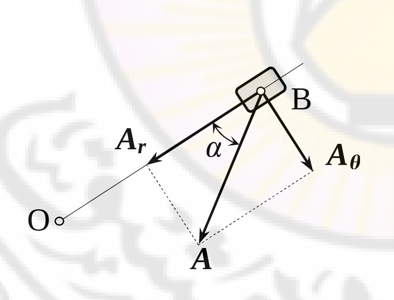
$$V_\theta = r.\dot{\theta} = 1.603 \times 0.561 = 0.899\ \text{m/sec}$$

ومنه القيمة العددية للسرعة:

$$V_B = (V_r^2 + V_\theta^2)^{1/2} = 1.745\ \text{m/sec}$$

أما زاوية ميل متجه السرعة على الذراع OA ، فتعطى بالعلاقة (الشكل-1-23a):

$$\varphi_V = \tan^{-1}\frac{V_\theta}{V_r} = \tan^{-1}\frac{0.899}{1.495} = 31^{\circ}$$



(الشكل-1-23)

وتعطى القيمة العددية لتسارع الجسيم B بـــ:

$$A_B = (A_r^2 + A_\theta^2)^{1/2} = [(\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{r}.\dot{\theta} + r.\ddot{\theta})^2]^{1/2}$$

حيث علاقة المركبة القطرية:

$$A_r = \ddot{r} - r.\dot{\theta}^2$$

بالتعويض:

$$A_r = -0.8 - 1.603(0.561)^2 = -1.304\ \text{m/sec}^2$$

والمركبة العرضانية:

$$A_\theta = 2\dot{r}.\dot{\theta} + r.\ddot{\theta}$$

بالتعويض:

$$A_\theta = 1.603(0.3) + 2(-1.495)0.561 = -1.196\ \text{m}/\sec^2$$

ومنه القيمة العددية للتسارع:

$$A_\text{B} = (A_r^2 + A_\theta^2)^{1/2} = [(-1.304)^2 + (-1.196)^2]^{1/2} = 1.77\ \text{m}/\sec^2$$

أما زاوية ميل متجه التسارع على الذراع OA فتعطى بالعلاقة (الشكل-1-23b):

$$\varphi_A = \tan^{-1}\frac{A_\theta}{A_r} = \tan^{-1}\frac{-1.196}{-1.304} = \tan^{-1}0.917 = 42.5^\circ$$

مسألة -1-7

يتحرك جسيم على منحنٍ معادلته القطبية:

$$\rho = a\ .\ \cos\theta$$

بسرعة زاوية منتظمة مقدارها:

$$\dot{\theta} = \omega = 2\ \text{rad}/\sec$$

حيث a ثابت تناسب. المطلوب تحديد كل من متجه السرعة ومتجه التسارع بدلالة طول متجه الموضع $\boldsymbol{r}$.

الحل:

يتحدد متجه السرعة بالعلاقة:

$$\boldsymbol{V} = \dot{r}.\boldsymbol{i} + r.\dot{\theta}.\boldsymbol{j}$$

ويتحدد متجه التسارع بالعلاقة:

$$\boldsymbol{A} = (\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2)\boldsymbol{i} + (2\dot{r}.\dot{\theta} + r.\ddot{\theta})\boldsymbol{j}$$

ويتم ذلك بتحديد كل من القيم:

$$\theta\ ,\dot{\theta}\ ,\ddot{\theta},\ r\ ,\ \dot{r}\ ,\ \ddot{r}$$

لإيجاد θ نعد الخط الواصل من القطب إلى الموضع الابتدائي للجسيم خطاً أساسياً، بالتالي تكون الشروط الابتدائية:

$$t = 0 \quad , \quad \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad r = a$$

ولدينا:

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = 2$$

بالتكامل:

$$\int_{\theta=0}^{\theta} d\theta = \int_{t=0}^{t} 2dt$$

منه:

$$\theta = 2t \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = 2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = 0$$

ولايجاد ρ لدينا:

$$\rho = a.\cos\theta = a.\cos 2t$$

منه:

$$\dot{\rho} = -2a.\sin 2t = -2a\sqrt{1-\cos 2t} = -2\sqrt{a^2 - a^2.\cos 2t} = -2\sqrt{a^2 - \rho^2}$$

$$\ddot{\rho} = -4a.\cos 2t = -4\rho$$

بالتعويض في مركبات السرعة:

مركبة السرعة القطرية:

$$V_\rho = \dot{\rho} = -2\sqrt{a^2 - \rho^2}$$

مركبة السرعة العرضانية:

$$V_\theta = \rho.\dot{\theta} = 2\rho$$

ومنه القيمة العددية للسرعة:

$$V = (V_\rho^2 + V_\theta^2)^{1/2} = [(-2\sqrt{a^2 - \rho^2})^2 + 4\rho^2]^{1/2} = \sqrt{4a^2 - 4\rho^2 + 4\rho^2} = 2a$$

وبالتعويض في مركبات التسارع:

مركبة التسارع القطرية:

$$A_\rho = \ddot{\rho} - \rho.\dot{\theta}^2 = -4\rho - 4\rho = -8\rho$$

ومركبة التسارع العرضانية:

$$A_\theta = 2\dot{\rho}.\dot{\theta} + \rho.\ddot{\theta} = 2(-2\sqrt{a^2 - \rho^2})2 = -8\sqrt{a^2 - \rho^2}$$

ومنه القيمة العددية للتسارع:

$$A = (A_\rho^2 + A_\theta^2)^{1/2} = [(-8\rho)^2 + (-8\sqrt{a^2 - \rho^2})^2]^{1/2} = 8a$$

مسألة -1-8

تحافظ المرحلة الثالثة من صاروخ على ارتفاع ثابت (المحور الأفقي)، وذلك خلال مدة عمل محرك دفع الصاروخ في اثناء طيرانه على ارتفاع عال.

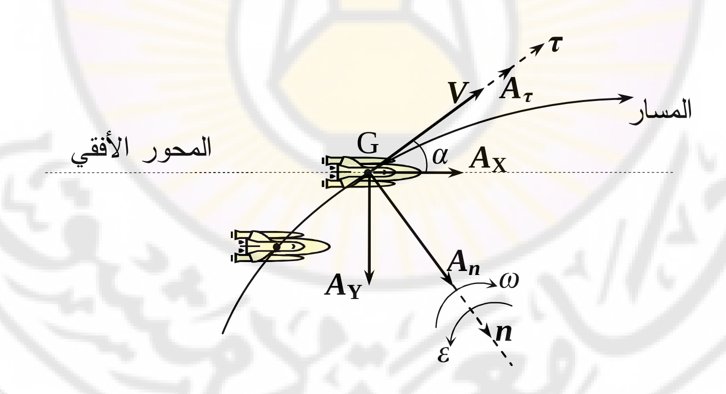
نتيجة الدفع يكتسب الصاروخ تسارعاً أفقياً ($A_X = 12\ \ m/sec^2$)، وتسارعاً أرضياً متجهاً عمودياً للأسفل ويبلغ مقداره ($A_Y = 9.1\ \ m/sec^2$).

فإذا كانت سرعة الصاروخ في هذه اللحظة ($V = 15000\ \ km/h$) تمس المسار الذي يرسمه مركز ثقل الصاروخ، وتميل على الأفق بزاوية ($\alpha = 15^o$)، وتتجه نحو الأعلى لأنها تنشأ عن حركة الدفع الناتجة عن المرحلة الثانية من الصاروخ عند تحركه في المرحلة الثالثة، وكان معدل ازدياد نصف قطر التقوس هو $20\ \ km/sec$.

المطلوب في هذه اللحظة، حساب ما يلي:

1. نصف قطر تقوس المسار.
2. التسارع الزاوي $(e = \ddot{q})$ لشعاع نصف قطر التقوس.

الحل:



(الشكل-1-24)

1. لحساب نصف قطر التقوس نحسب التسارع الناظمي وفق (الشكل-1-24):

$$A_n = A_Y.\cos a + A_X.\sin a = 9.1\cos 15 + 12\sin 15 = 11.63\ m/sec^2$$

لكن:

$$A_n = \frac{V^2}{r} \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{V^2}{A_n}$$

حيث:

$$V=\frac{15000\times 1000}{3600}=4170\ \mathrm{m/sec}$$

بالتعويض:

$$r=\frac{(4170)^2}{11.63}=1.48\times 10^6\ \mathrm{m}$$

2. لحساب التسارع الزاوي ε نحسب التسارع المماسي من (الشكل-1-24):

$$A_t=A_X.\cos\alpha-A_Y.\sin\alpha=12\cos 15-0.1\sin 15=9.24\ \mathrm{m/sec^2}$$

لكن علاقة التسارع المماسي يكافئ المركبة العرضانية للتسارع في الحركة القطبية، ويعطى بالعلاقة:

$$A_t=A_\theta=2\dot{r}.\dot{\theta}+r.\ddot{\theta}=2\dot{r}.\omega+r.\varepsilon$$

حيث:

$$r=r=1.48\times 10^6\ \mathrm{m}\qquad\Rightarrow\qquad \dot{r}=\dot{r}=20\times 10^3\ \mathrm{m/sec}$$

$$\omega=\frac{V}{r}=\frac{4170}{1.48\times 10^6}=2.82\times 10^{-3}\ \mathrm{sec^{-1}}$$

بالتعويض:

$$9.24=2\times 20\times 10^3\times 2.82\times 10^{-3}+1.48\times 10^6.\varepsilon$$

منه:

$$\varepsilon=-76.22\times 10^{-6}\ \mathrm{sec^{-2}}$$

وإشارة السالب تشير إلى أن اتجاه التسارع الزاوي هو معاكس لاتجاه السرعة الزاوية ω .

مسائل غير محلولة PROBLEMS

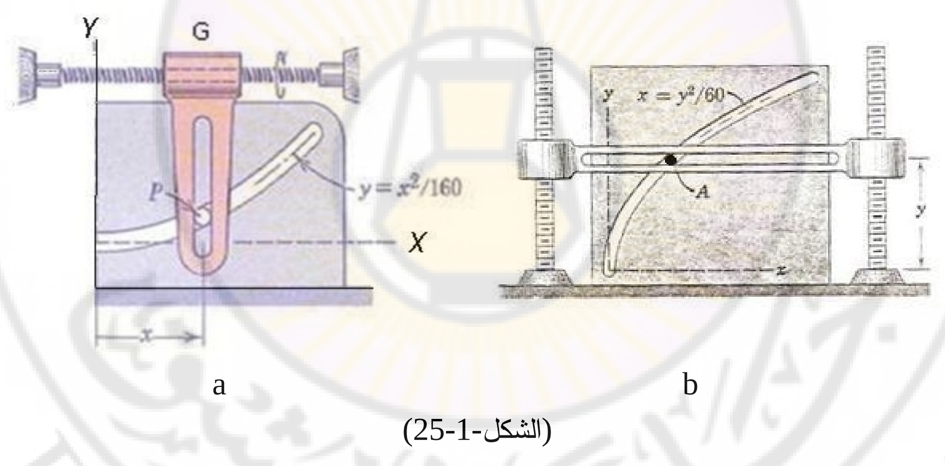
مسألة - 1

خلال فترة معينة من الحركة، يتحرك الدليل الرأسي G إلى اليمين بسرعة منتظمة مقدارها 20 mm/sec في الاتجاه الأفقي، ويسبب حركة المسمار P (*Pin*) في مجرى ثابت له هيئة قطع مكافئ معـــــــادلته ($y = x^2/160$)، حيث x و y تقاس بالمليمتر.

المطلوب في اللحظة المبينة في (الشكل1-25a)، والتي توافق ($x = 60$ mm)، حساب ما يلي:

1. سرعة المسمار P .
2. تسارع المسمار P .

الجواب: $V_P = 25$ mm/sec , $A_P = 5$ mm/sec^2



a b

(الشكل-1-25)

مسألة - 2

يجبر المسمار(*Pin*) A على الحركة داخل أخـــــــدود ثابت بشكل قطع مكافئ معادلته ($x = y^2/60$)، بواسطة الذراع المشقوق الأفقي كما هو مبين في (الشكل1-25b)، والذي يصعد باتجاه Y بسرعة ثابتة مقدارها 30 mm/sec عندما تكون (x= 60 mm).

المطلوب حساب ما يلي:

1. سرعة المسمار A .
2. تسارع المسمار A .

الجواب: $V_A = 67.1$ mm/s , $A_A = 30$ mm/s^2

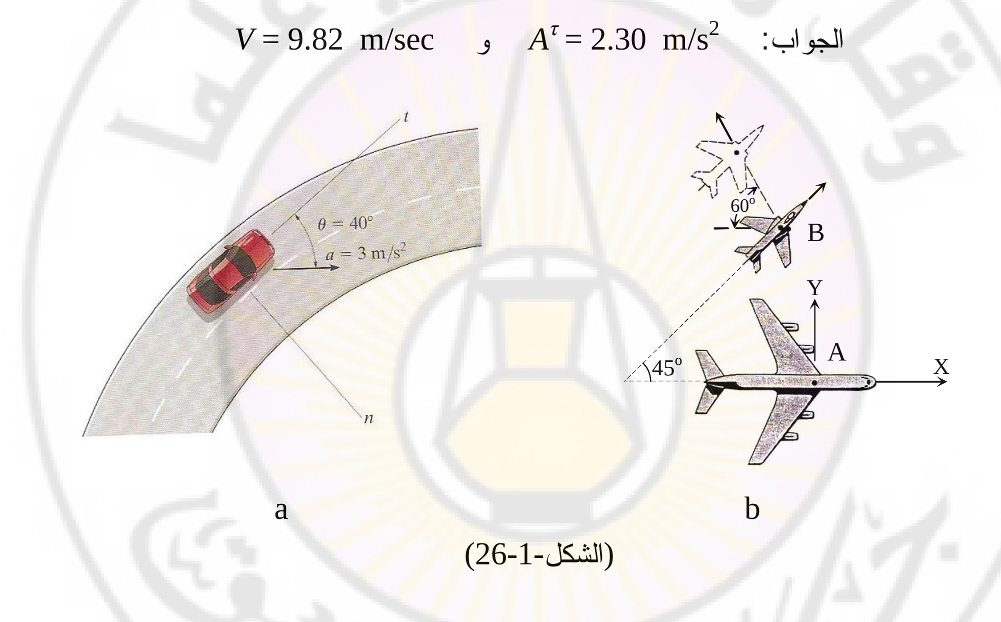
مسألة - 3

سيارة تتحرك على مسار منحن، فإذا كان التسارع الكلي للسيارة يساوي $3\ \text{m/sec}^2$ وفق الاتجاه المبين في (الشكل-1-26a) عند نصف قطر الانحناء $50\ \text{m}$.

المطلوب حساب مايلي:

1. سرعة حركة السيارة
2. التسارع المماسي للسيارة

الجواب: $A^{\tau} = 2.30\ \text{m/s}^2$ و $V = 9.82\ \text{m/sec}$



(الشكل-1-26)

مسألة - 4

يلاحظ ركاب طائرة نقل نفاثة A تحلق في اتجاه الشرق بسرعة 800 km/h ، طائرة نفاثة ثانية B تمر من تحت طائرة الركاب في طيران أفقي، وبالرغم من ان مقدمة الطائرة B موجهة في اتجاه الشمال الشرقي 45^o ، فإنها تظهر بالنسبة لركاب الطائرة A كأنها تتحرك بعيداً عن طائرة النقل في اتجاه 60^o ، الموضحة بالرسم في (الشكل-1-26b).

المطلوب حساب السرعة الحقيقية للطائرة B .

الجواب: $V_{B/A} = 586\ \text{km/h}$ و $V_B = 717\ \text{km/h}$

مسألة - 5

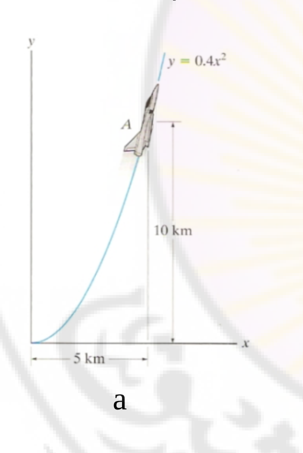
تحلق طائرة نفاثة (*Jet Plane*) **A** ، بسرعة مقدارها 200 m/sec ، وبتسارع مماسي مقداره $0.8 \ m/sec^2$ ، على مسار منحن معادلته ($y = 0.4 x^2$)، كما هو مبين في (الشكل-1-27a). المطلوب عندما تكون ($x = 5 \ km$)، حساب ما يلي:

1. نصف قطر تقوس المسار.
2. التسارع الكلي للطائرة.

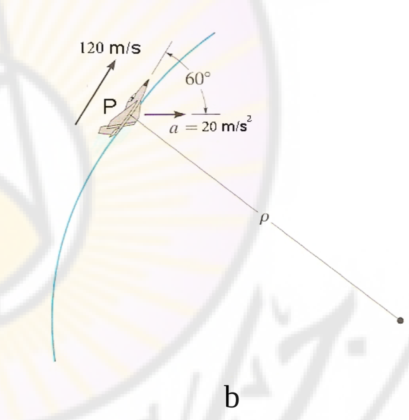
ملاحظة: يعطى نصف قطر تقوس المسار بالعلاقة:

$$r = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

الجواب: $A = 0.92 \ m/sec^2 \quad , \quad \rho = 87.62 \ km$



a



b

(الشكل-1-27)

مسألة - 6

تحلق طائرة نفاثة (*Jet Plane*) P ، بسرعة مقدارها 120 m/sec ، وبتسارع أفقي مقداره $20 \ m/sec^2$ ، على مسار منحن كما هو مبين في (الشكل-1-27b). المطلوب حساب ما يلي:

1. التسارع المماسي للطائرة P .
2. نصف قطر تقوس المسار ρ .

الجواب: $A^{\tau} = 10 \ m/s^2$ و $\rho = 832 \ m$

مسألة - 7

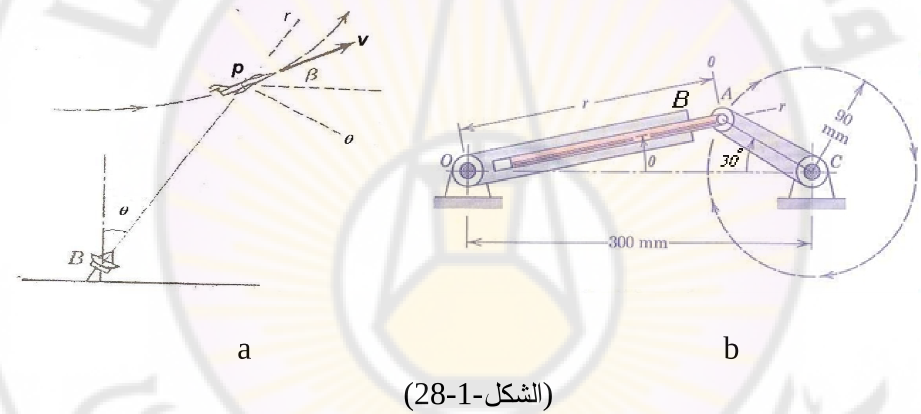
تحلق طائرة نفاثة (*Jet Plane*) بسرعة ثابتة مقدارها 400 km/h على مسار منحن نصف قطر انحنائه 600 m عندما تكون الطائرة في الموضع P ، حيث يصنع متجه السرعة مع الافق زاوية تساوي ($\beta = 30°$)، ويعطي رادار الرصد البيانات التالية:

$$r = 800 \text{ m} \quad , \quad \theta = 30°$$

المطلوب للوضع المبين في (الشكل-1-28a)، تحديد المركبات القطبية لسرعة الطائرة وتسارعها.

الجواب: $V = 9.82$ m/s , $V_\theta = 55.6$ m/s , $V_r = 96.2$ m/s

$A_r = 10.29$ m/s^2 , $A_\theta = -17.82$ m/s^2 , $A_\tau = 2.30$ m/s^2



a b

(الشكل-1-28)

مسألة - 8

يتحرك مسمار (*Pin*) A على مسار دائري باتجاه عقارب الساعة، بفعل دوران المرفق AC بسرعة زاوية ثابتة مقدارها ($\omega = 60$ rad/sec)، كما تدور في الوقت ذاته الوصلة OB حول المفصل الثابت O نتيجة انزلاق ذراع موصول بالمسمار بداخلها، كما هو مبين في (الشكل-1-28b)، المطلوب عند الوضع الموافق لــ ($\beta = 30°$)، حساب ما يلي:

1. سرعة المسمار A .
2. تسارع المسمار A .
3. القيم العددية للكميات التالية $\dot{r}, \ddot{r}, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$.

الجواب:

$$V_A = 5.4 \text{ m/sec} \quad , \quad \dot{r} = 3.58 \text{ m/sec} \quad , \quad \dot{\theta} = 17.86 \text{ rad/sec}$$

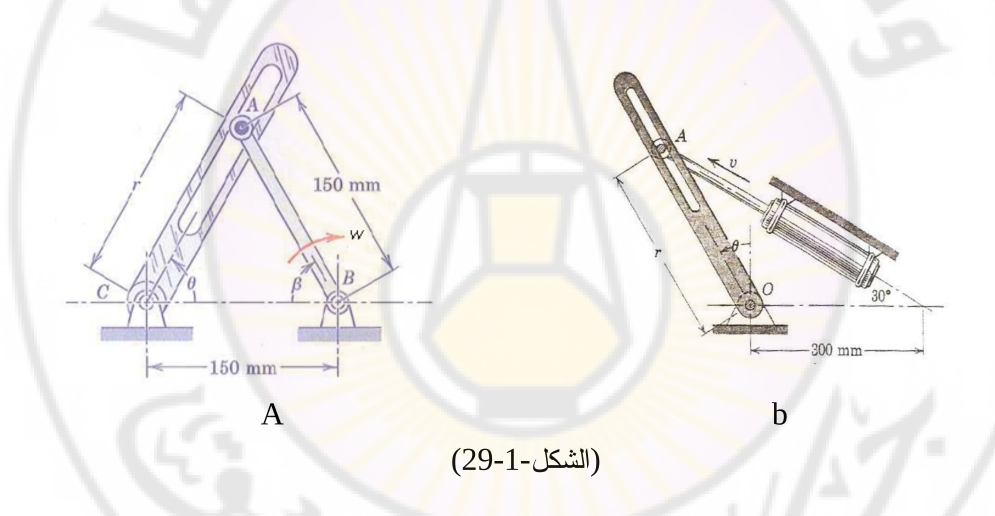
$$A_A = 324 \text{ m/sec}^2 \quad , \quad \ddot{r} = 315 \text{ m/sec}^2 \quad , \quad \ddot{\theta} = -1510 \text{ rad/sec}^2$$

مسألة - 9

يدور الذراع AB بسرعة زاوية ثابتة مقدارها ($\omega = 3$ rad/sec)، باتجاه حركة عقارب الساعة، مما يؤدي إلى دوران الذراع المشقوق بواسطة المسمار **A** ، المطلوب للوضع المبين في (الشكل-1-29a)، والموافق لـــ ($\beta = 60°$)، حساب ما يلي:

1. سرعة المسمار وتسارعه.
2. المركبات القطبية لسرعة المسمار وتسارعه.

الجواب: $V = 0.45$ m/s , $V_r = 0.39$ m/sec , $V_\theta = -0.224$ m/sec
$A = 1.35$ m/sec^2 , $A_r = -0.675$ m/sec^2 , $A_\theta = -1.17$ m/sec^2



A b

(الشكل-1-29)

مسألة - 10

يتحرك ذراع أسطوانة هيدروليكية بسرعة خطية ثابتة مقدارها ($V = 2$ m/sec) على امتداد محورها مما يؤدي إلى دوران الذراع المشقوق حول المفصل O . المطلوب للوضع المبين في (الشكل-1-29b)، والموافق لـــ ($\theta = 30°$)، حساب القيم العددية للكميات التالية:

$$\dot{r}\,,\ \ddot{r}\,,\ \dot{\theta}\,,\ \ddot{\theta}$$

الجواب :

$$\dot{r} = 1.73 \text{ m/sec} \quad , \quad \ddot{r} = 3.33 \text{ m/sec}^2$$
$$\dot{\theta} = 3.33 \text{ rad/sec} \quad , \quad \ddot{\theta} = -38.5 \text{ rad/sec}^2$$

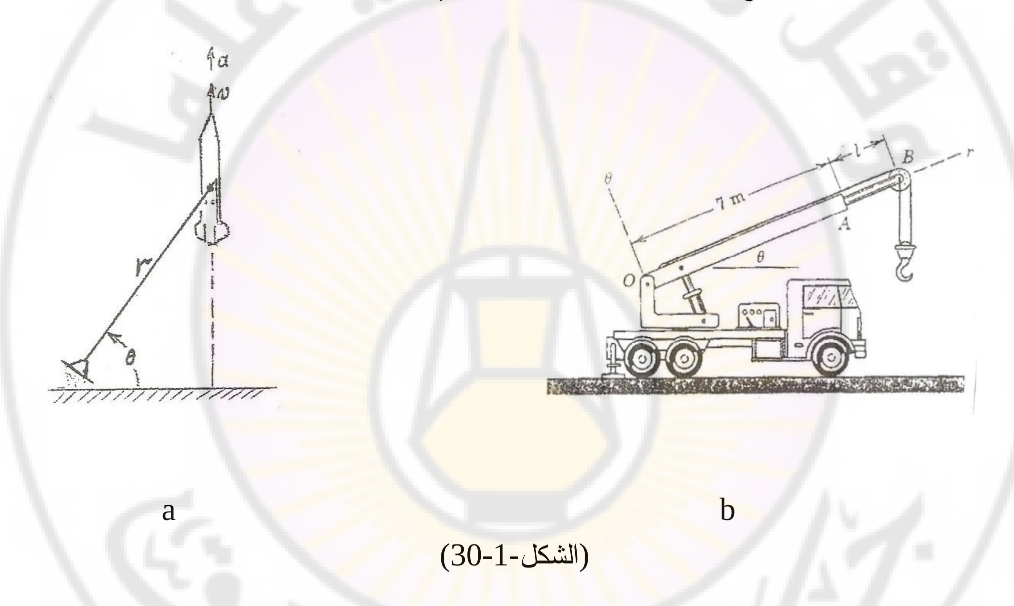
مسألة - 11

تتبع محطة رادار صاروخاً في أثناء إطلاقه رأسياً باتجاه الأعلى، كما هو مبين في (الشكل-1-30a)، فعندما تكون الزاوية ($\theta = 60°$)، فان المعطيات الأخرى تكون كما يلي:

$$r = 9 \text{ km} \quad , \quad \ddot{r} = 21 \text{ m/sec}^2 \quad , \quad \dot{\theta} = 0.02 \text{ rad/sec}$$

المطلوب حساب سرعة الصاروخ وتسارعه في هذا الوضع.

الجواب: $V = 360$ m/s , $A = 20.1$ m/s^2



a　　　　　　　　b

(الشكل-1-30)

مسألة - 12

يدور ذراع الرافعة OAB حول المفصل O ، ويتغير في الوقت ذاته الطول AB من خلال تداخله مع الجزء OA ، كما هو مبين في (الشكل-1-30b). المطلوب حساب سرعة مركز البكرة B وتسارعه عند الشروط التالية:

$$l = 2 \text{ m} \quad , \quad \dot{l} = 0.5 \text{ m/sec} \quad , \quad \ddot{l} = -1.2 \text{ m/sec}^2$$

$$\theta = 20^o \quad , \quad \dot{\theta} = 5 \text{ deg/sec} \quad , \quad \ddot{\theta} = 2 \text{ deg/sec}^2$$

الجواب: $V = 0.785$ m/s و $A = 1.33$ m/s^2

الفصل الثاني

بعض الحالات الخاصة لحركة الجسيم المادي

Some Special Cases of a Particle Motion

ندرس بالاستعانة بالنتائج السابقة بعض الحالات الخاصة لحركة الجسيم المادي:

1- الحركة المستقيمة لجسيم مادي *Rectilinear Motion of a Particle*

1-1- معادلة الحركة المستقيمة

في الحركة المستقيمة يكون مسار الجسيم المتحرك M مستقيماً، يوجه المسار، ويعد كمحور موجه OX ، حيث O مبدأ الفواصل، كما في هو مبين في (الشكل-2-1).

(الشكل-2-1)

فإذا كان موضع الجسيم المادي M ، أو إحداثيته x معروفة من أجل أي قيمة زمنية t ، نقول عندها إن حركة الجسيم المادي معلومة، بالتالي معادلة الحركة المستقيمة للجسيم بطريقة الاحداثيات تعطى بالعلاقة:

$$x = f(t) \tag{1-2}$$

يتعين انتقال الجسيم على مساره المستقيم بالإحداثية x ، ويمكن أن يكون موجباً أو سالباً، فإذا كانت القيمة المطلقة للانتقال $|x|$ تتزايد، فإن الجسيم M يبتعد عن المبدأ، وإذا كانت تتناقص مع الزمن، فالجسيم يقترب من المبدأ.

كذلك من (الشكل-2-1) يمكننا أن نكتب علاقة المتجه الموضعي للجسيم M :

$$\mathbf{OM} = \boldsymbol{r} = x.\boldsymbol{i} \tag{2-2}$$

حيث $\boldsymbol{i}$ المتجه الواحدي للمسار المستقيم الموجه، وهو متجه ثابت.

ومنه متجه السرعة:

$$\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{dM}}{dt} = \frac{\boldsymbol{dr}}{dt} = \dot{x}.\boldsymbol{i} \tag{3-2}$$

المنطبق على المسار المستقيم ويتجه باتجاه الحركة وقيمته العددية:

$$V = \dot{x} \tag{4-2}$$

أما متجه التسارع:

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{dV}}{dt} = \frac{\boldsymbol{d^2M}}{dt^2} = \frac{\boldsymbol{d^2r}}{dt^2} = \ddot{x}\,\boldsymbol{i} \qquad (5\text{-}2)$$

المنطبق على المسار المستقيم ويعتمد اتجاهه على القيمة العددية للتسارع:

$$A = \dot{V} = \ddot{x} \qquad (6\text{-}2)$$

وبتطبيق علاقة السرعة بالطريقة الطبيعية:

$$\boldsymbol{V} = \dot{s}.\boldsymbol{\tau} = \dot{x}.\boldsymbol{i}$$

نحصل على علاقة السرعة بطريقة الإحداثيات لأن المماس ينطبق على المسار المستقيم.

وبتطبيق علاقة التسارع بالطريقة الطبيعية:

$$A = (A_t^2 + A_n^2)^{1/2}$$

حيث التسارع الناظمي معدوم:

$$A_n = \frac{V^2}{r} = 0$$

لأن المسار هو خط مستقيم ونصف قطر انحنائه:

$$r = \infty$$

ويصبح التسارع الكلي للجسيم مساويا للتسارع المماسي فقط، والذي يكافئ التسارع بطريقة الإحداثيات:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_\tau = \dot{V}.\boldsymbol{\tau} = \ddot{x}\,\boldsymbol{i}$$

وبما أن السرعة تتغير على المستقيم الموجه بالمقدار فحسب، بالتالي التسارع الكلي يبين التغير في مقدار السرعة فحسب.

مسألة 2-1-1

يتحرك جسيم على امتداد خط مستقيم تبعا للمعادلة:

$$x = 2t^3 - 24t + 6$$

حيث الانتقال x يقاس بالأمتار من مصدر دائم، والزمن t يقاس بالثواني. المطلوب إيجاد:

1. الزمن اللازم للجسيم لتبلغ سرعته 72 m/sec من وضعه الابتدائي عندما ($t = 0$).
2. تسارع الجسيم عندما ($V = 30$ m/sec).
3. الانتقال الكلي للجسيم خلال الفترة من ($t = 1$ sec) إلى ($t = 4$ sec).

الحل:

يمكن الحصول على السرعة عند أي لحظة t ، باشتقاق معادلة الحركة بالنسبة للزمن:

$$V = 6t^2 - 24 \qquad (1)$$

أما التسارع، فنحصل عليه بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة للزمن:

$$A = 12t \qquad (2)$$

1. بتعويض بقيمة ($V = 72$ m/sec) في العلاقة (1)، نحصل على:

$$72 = 6t^2 - 24 \quad \Rightarrow \quad t^2 = 16 \text{ sec}^2 \quad \Rightarrow \quad t = \pm 4 \text{ sec}$$

حيث الجذر السالب لــ t يصف حلاً رياضياً قبل بدء الحركة، وعليه فلا فائدة فيزيائية له، والنتيجة المنشودة هي:

$$t = 4 \text{ sec}$$

2. بالتعويض بقيمة ($V = 30$ m/sec) في العلاقة (1)، نحصل على:

$$30 = 6t^2 - 24 \quad \Rightarrow \quad t^2 = 9 \text{ sec}^2 \quad \Rightarrow \quad t = \pm 3 \text{ sec}$$

نعوض في العلاقة (2) نحصل على التسارع الموافق.

$$A = 12 \times 3 = 36 \text{ m/sec}^2$$

3. الانتقال الكلي للجسيم خلال الفترة ($t = 1$ sec) إلى ($t = 4$ sec)، هو:

$$\Delta x = x_{t=4} - x_{t=1} = (2\times 4^3 - 24\times 4 + 6) - (2\times 1^3 - 24\times 1 + 6) = 54 \text{ m}$$

مسألة 2-2-

يتحرك جسيم على خط مستقيم تبعا للمعادلة:

$$x = t^3 - 6t^2 - 15t + 40 \qquad (1)$$

حيث الانتقال x يقاس بالأمتار من مصدر دائم، والزمن t يقاس بالثواني، المطلوب إيجاد:

1. الزمن الذي عنده تصبح السرعة معدومة.
2. الموضع والمسافة التي قطعها الجسيم حتى هذا الزمن.
3. تسارع الجسيم عند هذا الزمن.
4. المسافة التي يقطعها الجسيم من ($t = 4$ sec) إلى ($t = 6$ sec).

الحل:

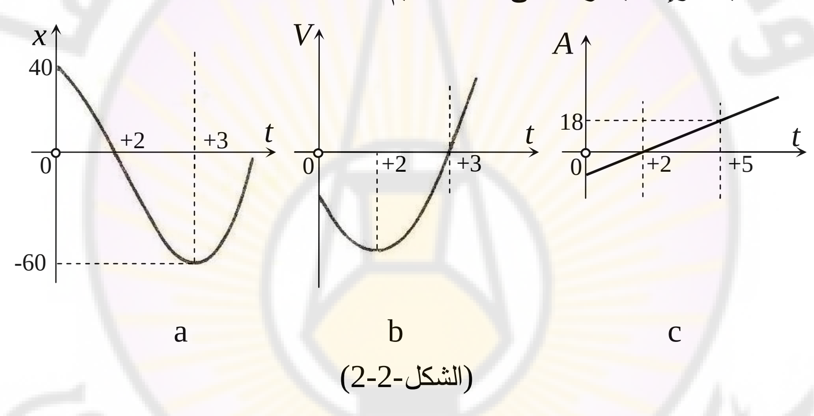
يمكن الحصول على السرعة عند أي لحظة t ، باشتقاق معادلة الحركة بالنسبة للزمن:

$$V = \dot{x} = 3\,t^2 - 12\,t \;\; - 15 \qquad (2)$$

أما التسارع، فنحصل عليه بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة للزمن:

$$A = \dot{V} = \ddot{x} = 6\,t - 12 \qquad (3)$$

تبين المنحنيات في (الشكل-2-2) العلاقة بين كل من قيم الموضع (الشكل-2-2a)، والسرعة (الشكل-2-2b)، والتسارع (الشكل-2-2c) مع الزمن. تسمى هذه المنحنيات بمنحنيات الحركة (*Motion Curves*)، ويجب ملاحظة أن الجسيم لا يتحرك على أي منحنٍ من هذه المنحنيات وإنما يتحرك على خط مستقيم.



(الشكل-2-2)

1. يتحدد الزمن الذي عنده تصبح السرعة معدومة، بوضع ($V = 0$) في (2)، نجد:

$$0 = 3\,t^2 - 12\,t \;\; - 15$$

ومنه جذرا المعادلة:

$$t = -1\,\text{sec} \qquad , \qquad t = 5\,\text{sec}$$

سنأخذ الجذر ($t = 5$ sec) فحسب أي بعد بدء الحركة:

فعندما $t < 5\,\text{sec} \quad \Leftarrow \quad V < 0$ يتحرك الجسيم في الاتجاه السالب.

وعندما $t > 5\,\text{sec} \quad \Leftarrow \quad V > 0$ يتحرك الجسيم في الاتجاه الموجب.

2. يتحدد الموضع والمسافة التي قطعها الجسيم بوضع ($t = 5$ sec) في (1)، نجد:

$$x_5 = 5^3 - 6 \times 5^2 - 15 \times 5 + 40 = -\,60\ \text{m}$$

بما أن الوضع الابتدائي عند ($t = 0$) هو:

$$x_0 = 40\ \text{m}$$

بالتالي تكون المسافة المقطوعة Δx_{05} :

$$\Delta x_{05} = x_5 - x_0 = -60 - 40 = -100 \text{ m}$$

الإشارة السالبة تدل على أن المسافة المقطوعة هي في الاتجاه السالب.

3. يتحدد تسارع الجسيم بوضع ($t = 5$ sec) في (3) نجد:

$$A_5 = 6\times 5 - 12 = 18 \text{ m/sec}^2$$

4. لحساب المسافة التي يقطعها الجسيم نلاحظ أنه يتحرك في الاتجاه السالب من ($t = 4$ sec) إلى ($t = 5$ sec)، ثم في الاتجاه الموجب من ($t = 5$ sec) إلى ($t = 6$ sec)، بالتالي يجب حساب المسافة المقطوعة في كل فترة على حده ثم نجمعهما.

نحسب المسافة الأولى من ($t = 4$ sec) إلى ($t = 5$ sec):

لدينا:

$$x_5 = -60 \text{ m}$$

نحسب:

$$x_4 = 4^3 - 6\times 4^2 - 15\times 4 + 40 = -52 \text{ m}$$

منه:

$$\Delta x_{\text{I}} = x_5 - x_4 = -60 - (-52) = -8 \text{ m}$$

وهي في الاتجاه السالب.

ولحساب المسافة الثانية من ($t = 5$ sec) إلى ($t = 6$ sec):

لدينا:

$$x_5 = -60 \text{ m}$$

نحسب:

$$x_6 = 6^3 - 6\times 6^2 - 15\times 6 + 40 = -50 \text{ m}$$

منه:

$$\Delta x_{\text{II}} = x_6 - x_5 = -50 - (-60) = 10 \text{ m}$$

وهي في الاتجاه الموجب.

وتكون المسافة الكلية من ($t = 4$ sec) إلى ($t = 6$ sec) هي:

$$\Delta x_{46} = |\Delta x_{\text{I}}| + |\Delta x_{\text{II}}| = 8 + 10 = 18 \text{ m}$$

مسألة 3-2-3

ادرس حركة جسيم مادي M يتحرك على خط مستقيم وفق العلاقة التالية:

$$x = 6\,t^2 - t^3$$

حيث t بالثواني و x بالأمتار.

الحل:

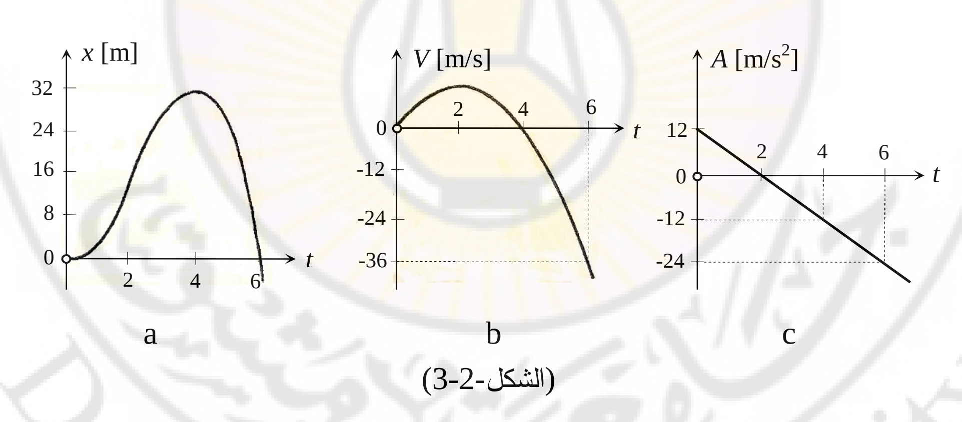
يمكن الحصول على السرعة عند أي لحظة باشتقاق العلاقة المعطاة بالنسبة للزمن:

$$V = \dot{x} = 12\,t - 3t^2$$

أما التسارع فنحصل عليه بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة للزمن:

$$A = \dot{V} = \ddot{x} = 12 - 6\,t$$

تبين المنحنيات في (الشكل-2-3) العلاقة بين كل من قيم الموضع (الشكل-2-3a)، والسرعة (الشكل-2-3b)، والتسارع (الشكل-2-3c) مع الزمن t ، تسمى هذه المنحنيات بمنحنيات الحركة، وكما ذكرنا يجب ملاحظة أن الجسيم لا يتحرك على أي منحنٍ من هذه المنحنيات وإنما يتحرك على خط مستقيم.



(الشكل-2-3)

بما أن اشتقاق أي علاقة يمثل ميل المماس للمنحني المقابل لهذه العلاقة، فيكون ميل المماس للمنحني $x = f\,(t)$ عند أي لحظة مساوياً إلى السرعة V عند هذه اللحظة، ويكون أيضاً ميل المماس للمنحني $V = f\,(t)$ عند أي لحظة مساوياً التسارع A عند هذه اللحظة.

بما أن ($A = 0$) عند ($t = 2$ sec) يكون ميل المماس للمنحني $V = f\,(t)$ مساوياً الصفر عند ($t = 2$ sec)، أي أن السرعة تصل لنهاية عظمى عند تلك اللحظة.

أيضاً بما أن ($V = 0$) عند ($t = 0$) وعند ($t = 4$ sec) حيث يكون المماس للمنحني $x = f\,(t)$ أفقياً عند هاتين اللحظتين.

بعد دراسة منحنيات الحركة الثلاثة يمكن تقسيم حركة الجسيم من ($t = 0$) إلى ($t = 6\ \text{sec}$) إلى أربعة أجزاء:

يبدأ الجسيم بالحركة من نقطة الأصل عند ($x = 0$) دون سرعة ولكن بتسارع موجب، وبسبب هذا التسارع يكتسب الجسيم سرعة موجبة ويتحرك في الاتجاه الموجب من ($t = 0$) إلى ($t = 2\ \text{sec}$)، ويكون كل من A , V, x بإشارة موجبة.

عند ($t = 2\ \text{sec}$) يكون التسارع مساوياً الصفر، وتكون السرعة قد وصلت إلى قيمتها العظمى من ($t = 2\ \text{sec}$) إلى ($t = 4\ \text{sec}$)، وتكون V موجبة، ويكون A سالباً، ويتحرك الجسيم في الاتجاه الموجب ولكن بسرعة أكثر بطئاً، أي أن الجسيم يتباطأ.

عند ($t = 4\ \text{sec}$) تكون السرعة مساوية الصفر، ويكون إحداثي الموضع x قد وصل إلى قيمته العظمى ($x_4 = 32\ \text{m}$)، وبعد هذا الموضع تصبح كل من V و A بإشارة سالبة، ويتسارع الجسيم ويتحرك في الاتجاه السالب بسرعة متزايدة.

عند ($t = 6\ \text{sec}$) يمر الجسيم بنقطة الأصل ويكون إحداثي الموضع x عندئذ مساوياً الصفر، بينما تكون المسافة الكلية التي قطعها الجسيم من بداية الحركة هي ($64\ \text{m}$)، وتكون قيم A , V, x كلها بإشارة سالبة لقيم ($t > 6\ \text{sec}$)، ويستمر الجسيم في الحركة في الاتجاه السالب بعيداً عن نقطة الأصل بسرعة أكبر وأكبر.

2-1- الحركة المستقيمة المنتظمة *Uniform Rectilinear Motion*

إن أسهل أنواع الحركة للجسيم المادي هي الحركة المستقيمة المنتظمة، التي يكون فيها متجه سرعة الجسيم المتحرك ثابتاً في أي لحظة زمنية، ففي هذه الحركة:

$$\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{dM}}{\boldsymbol{dt}} \tag{7-2}$$

حيث $\boldsymbol{V}$ متجه ثابت، بإجراء التكامل بعد معرفة الشروط الابتدائية نحصل على:

$$\mathbf{M} - \mathbf{M_0} = \boldsymbol{V}.t \tag{8-2}$$

حيث M_0 تمثل وضع الجسيم المتحرك في اللحظة t_0 و M وضعه في اللحظة t ، وتعطي العلاقة (2-8) الأوضاع المختلفة للمتحرك في مختلف الأزمنة، وإن المتحرك الذي يتصف بسرعة ثابتة $\boldsymbol{V}$ قيمتها العددية $(V = \dot{x} = \text{const})$، يقطع مسافات متساوية في أزمنة متساوية، وبإسقاط العلاقة (2-8) على المحور X نحصل على:

$$x - x_0 = V.t \tag{9-2}$$

معادلة من الدرجة الأولى تمثل معادلة الحركة المستقيمة المنتظمة، ويمكن أن نستنتج منها أيضاً أن ميل المستقيم الذي يمثل بعد الجسيم المتحرك بالنسبة للزمن يساوي سرعة الحركة.

أما التسارع ففي هذه الحالة:

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{dV}}{dt} = 0 \tag{10-2}$$

ومنه فإن الحركة المستقيمة المنتظمة هي الحركة الوحيدة التي تسارعها معدوم طوال الوقت.

كما تعطي هذه الدراسة معادلة الحركة المنحنية المنتظمة لجسيم مادي (*Uniform Curvilinear Motion*) ذلك إذا فرضنا:

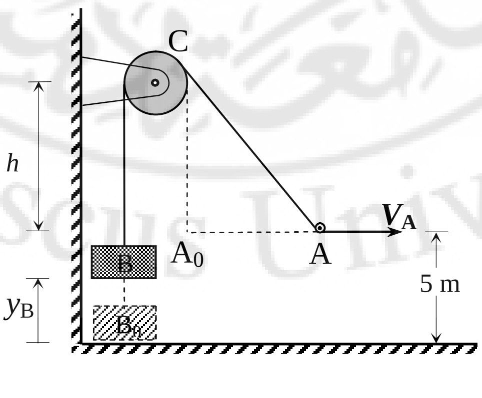
$$x = s$$

مسألة -2-4

يمرر الحبل AB عبر بكرة مهملة C ، حيث يتصل طرفه بكتلة B ، بينما طرفه الآخر يكون في A_0 على ارتفاع 5 m فوق السطح الأفقي عندما كانت الكتلة B على السطح كما هو مبين في (الشكل-2-4)، فإذا تحرك الطرف A أفقياً في خط مستقيم بسرعة منتظمة قدرها ($V = 10$ m/sec)، المطلوب إيجاد:

1. العلاقة $V = f(t)$ للكتلة B .
2. الزمن المطلوب حتى تصل الكتلة B إلى البكرة C إذا كان ($h = 15$ m).

الحل:



(الشكل-2-4)

1. نفرض طول الحبل l فمن الشكل:

$$l = 2h + 5$$

فإذا كان طول الجزء AC هو l_1 ، فعند أي موضع y للكتلة B يكون:

$$l = l_1 + h + 5 - y_B$$

ومنه:

$$y_B = l_1 - h \qquad (1)$$

حيث:

$$l_1 = [(A_0C)^2 + (A_0A)^2]^{1/2}$$

منه:

$$l_1 = [(h)^2 + (\Delta x_A)^2]^{1/2} = (h^2 + V_A^2 . t^2)^{1/2} \qquad (2)$$

ومنه بالتعويض في (1):

$$y_B = (h^2 + V_A^2 . t^2)^{1/2} - h$$

بالاشتقاق:

$$V_B = \dot{y}_B = V_A^2 . t / (h^2 + V_A^2 . t^2)^{1/2}$$

بالتعويض نحصل على العلاقة المطلوبة:

$$V_B = 100\, t / (225 + 100\, t^2)^{1/2}$$

2. عندما تصل الكتلة B إلى البكرة C يكون:

$$y_B = h + 5 = 20 \text{ m}$$

بالتعويض في المعادلة (1) يكون:

$$20 = l_1 - 15 \qquad \Rightarrow \qquad l_1 = 35 \text{ m}$$

بالتعويض في المعادلة (2) يكون:

$$35 = (225 + 100\, t^2)^{1/2} \qquad \Rightarrow \qquad t^2 = 10 \text{ sec}^2$$

ومنه :

$$t = 3.16 \text{ sec}$$

مسألة -2-5

يتحرك القضيب AB طوله l في مستوي شاقولي بين جدارين متعامدين كما هو مبين في (الشكل-2-5)، فإذا بدأ القضيب الحركة من الوضع الشاقولي بحيث يتحرك الطرف A أفقياً بسرعة ثابتة وقدرها V_A .

المطلوب تحليليا إيجاد العلاقة بين $y_B = f(t)$ ، $V_B = f(t)$ ، $A_B = f(t)$ للطرف B الملامس للجدار الشاقولي.

الحل:

نعد جملة محاور OXY تنطبق على الجدارين المتعامدين فيكون لدينا معادلة حركة الطرف A :

$$x_A = OA = V_A . t$$

ومنه معادلة حركة الطرف B :

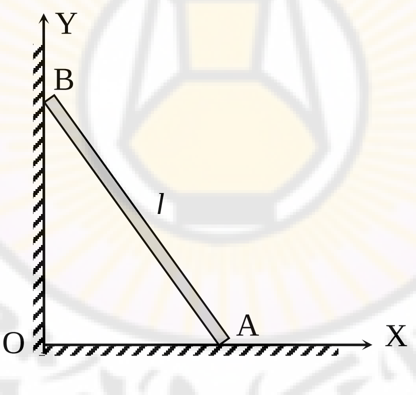
$$y_B = OB = (l^2 - V_A^2 . t^2)^{1/2} \qquad (1)$$

بالتالي سرعة الطرف B :

$$V_B = \dot{y}_B = -V_A^2 . t \,/\, (l^2 - V_A^2 . t^2)^{1/2} \qquad (2)$$

وتسارع الطرف B :

$$A_B = \dot{V}_B = \ddot{y}_B = -V_A^2 . l^2 \,/\, (l^2 - V_A^2 . t^2)^{3/2} \qquad (3)$$



(الشكل-2-5)

ويمكن كتابة المعادلة (1) على الشكل التالي:

$$\frac{y_B^2}{l^2} + \frac{t^2}{(l / V_A)^2} = 1$$

وهي علاقة تمثل قطعاً ناقصاً بين t و y_B ، والعلاقات (1) و (2) و (3) صالحة فحسب عندما:

$$0 < t < l / V_A$$

وذلك بفرض أن الطرف B يبقى ملامساً للجدار الشاقولي في أثناء حركة القضيب.

3-1- الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام

Uniformly Variable Rectilinear Motion

في الحركات التي متجه تسارعها ثابت في أي لحظة زمنية يكون ازدياد السرعة أو نقصانها خلال فترات زمنية متساوية واحداً، لذا يسمى هذا النوع من الحركات بالحركة المتسارعة بانتظام (*Uniformly Accelerated Rectilinear Motion*) أو متباطئة بانتظام (*Uniformly Decelerated Rectilinear Motion*).

ففي هذه الحركة لدينا:

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{dV}}{dt} = \frac{\boldsymbol{d^2 M}}{dt^2} \qquad (11\text{-}2)$$

حيث $\boldsymbol{A}$ متجه ثابت، بفصل المتغيرات وإجراء التكامل بدلالة الزمن نحصل على:

$$\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{dM}}{dt} = \boldsymbol{A}.t + \boldsymbol{b} \qquad (12\text{-}2)$$

حيث $\boldsymbol{b}$ متجه ثابت المكاملة تعينه الشروط الابتدائية، فإذا حسبنا أن سرعة المتحرك في اللحظة ($t = 0$) هي $\boldsymbol{V_0}$ كان عندها ($\boldsymbol{b} = \boldsymbol{V}_0$)، ويمكن كتابة العلاقة (12-2) على الشكل التالي:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}.t + \boldsymbol{V}_0 \qquad (13\text{-}2)$$

التي تمثل علاقة تعيين السرعة $\boldsymbol{V}$ بدلالة الزمن t ، ووجود متجه السرعة الابتدائية $\boldsymbol{V_0}$ يتفق مع الحقيقة، إذ إن هناك عدة حركات توافق التسارع المعطى $\boldsymbol{A}$ ، ويمكننا أن نميز حالتين:

السرعة الابتدائية $\boldsymbol{V_0}$ توازي التسارع $\boldsymbol{A}$ بالتالي تحافظ السرعة $\boldsymbol{V}$ على منحى ثابت، ويتحرك الجسيم على مستقيم يوازي $\boldsymbol{A}$ بحركة مستقيمة متغيرة بانتظام.

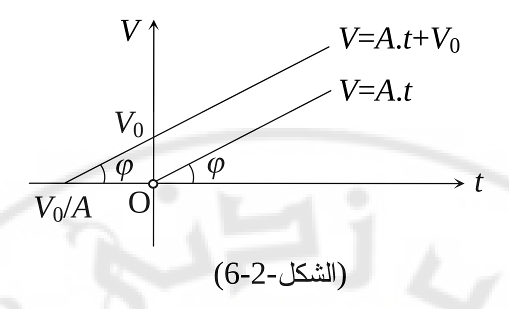
السرعة الابتدائية $\boldsymbol{V_0}$ لا توازي التسارع $\boldsymbol{A}$ ، بالتالي لا تحافظ السرعة $\boldsymbol{V}$ على منحى ثابت، ويتحرك الجسيم على منحني حركة متغيرة بانتظام. (ستناقش في وقت لاحق).

بإسقاط العلاقة (13-2) على المحور OX يعطي:

$$V = \dot{x} = \pm A.t + V_0 \qquad (14\text{-}2)$$

وهي معادلة مستقيم كما هو مبين في (الشكل-2-6)، حيث V_0 تمثل القيمة العددية للسرعة الابتدائية، ويمكن أن نستنتج أن ميل هذا المستقيم الذي يمثل سرعة الجسيم المتحرك بالنسبة للزمن يساوي التسارع.

$$\tan j = (V - V_0)/t = A \qquad (15\text{-}2)$$



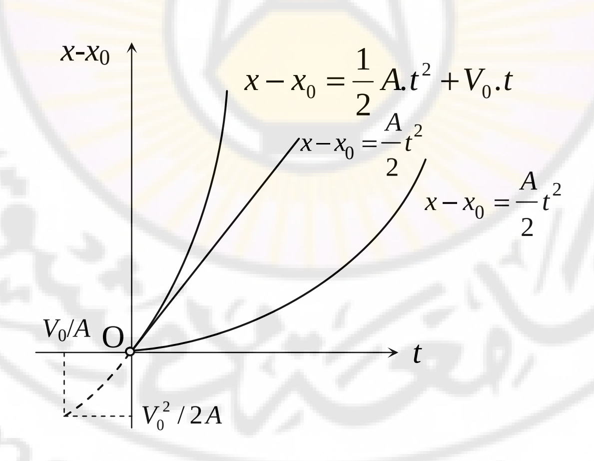
(الشكل-2-6)

وبفصل المتغيرات في العلاقة (2-13)، وإجراء التكامل بدلالة الزمن نحصل على:

$$\mathbf{M} - \mathbf{M_0} = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}.t^2 + \boldsymbol{V_0}.t \qquad (16\text{-}2)$$

وتعين العلاقة (2-16) الأوضاع المختلفة للجسيم M على المستقيم المار من الوضع الابتدائي M_0 والموازي لـــ $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{V_0}$ ، أي أنها تعين وضع الجسيم بدلالة الزمن أي المسافة المقطوعة، ومسقطها على محور الحركة OX يعطى بـــ:

$$x - x_0 = \pm\frac{1}{2}A.t^2 + V_0.t \qquad (17\text{-}2)$$



(الشكل-2-7)

من هذه العلاقة يمكننا دراسة تحولات x بدلالة الزمن أي دراسة الحركة، وهي معادلة من الدرجة الثانية، ومخطط الحركة لها مبين في (الشكل-2-7)، وهو قطع مكافىء يختلف شكله بحسب القيمة العددية لكل من A , V_0 , x_0 .

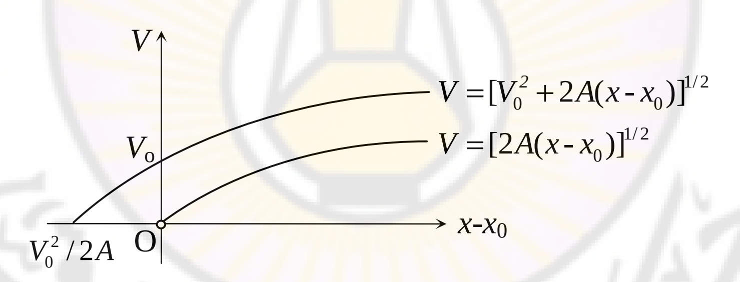
تكون الحركة متسارعة في الأوضاع التي يتجه فيها **V** من جهة **A** ، أي في الموضع التي يكون فيها الجداء السلمي ($0 < A \cdot V$) كحركة السقوط الحر، بينما تكون الحركة متباطئة في الأوضاع التي يتجه فيها **V** عكس جهة **A** أي في المواضع التي يكون فيها الجداء السلمي ($0 > A \cdot V$) كحركة القذف الشاقولي.

كذلك تكون الحركة مباشرة عندما يسير المتحرك في الجهة الموجبة للمحور، أي في جهة الفواصل المتزايدة، وتكون الحركة عكسية عندما يسير المتحرك في الجهة السالبة للمحور، أي في جهة الفواصل المتناقصة.

يمكن دمج العلاقتين (2-14) و (2-17) في علاقة واحدة مستقلة عن الزمن حيث نحصل على:

$$V^2 - V_0^2 = \pm\, 2A\,(x - x_0) \qquad (18\text{-}2)$$

علاقة السرعة بدلالة المسافة، وهي معادلة قطع مكافىء ذي محور ينطبق على محور المسافات كما في (الشكل-2-8).

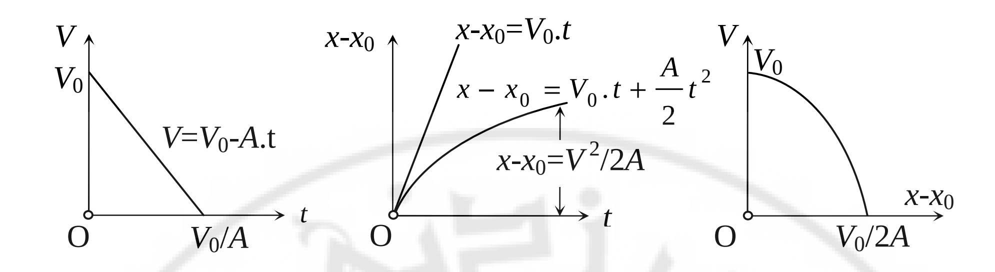


(الشكل-2-8)

أما زمن الحركة فنحصل عليه مباشرة من العلاقة (2-17):

$$t = \frac{V_0 \pm [(V_0^2 + 2A(x - x_0)]^{1/2}}{A} \qquad (19\text{-}2)$$

إن النتائج التي حصلنا عليها تستعمل بصورة عامة أيضاً في الحركة المتباطئة بانتظام غير أن التسارع يصبح سالباً، والمخططات التابعة لها هي كما في (الشكل-2-9).



(الشكل-2-9)

كما تعطي هذه الدراسة معادلات الحركة المنحنية المتغيرة بانتظام (*Uniformly Variable Curvilinear Motion*) لجسيم، ذلك إذا فرضنا:

$$A = A_t \qquad , \qquad x = s \qquad (20\text{-}2)$$

مسألة -2-6

يتحرك جسيم على خط مستقيم تبعا للعلاقة:

$$x = \frac{a}{k}(1 - e^{-kt})$$

حيث t تمثل الزمن مقاس بالثواني، و $a\,,k$ ثوابت تناسب، و e أس اللوغاريتم النابييري، المطلوب:

1. إيجاد العلاقات:

$x = f(t)$ و $V = f(t)$ و $A = f(t)$ و $V = f(x)$ و $A = f(x)$ و $A = f(V)$

2. إيجاد القيمة العظمى لكل من المسافة والسرعة والتسارع، ومتى تحدث كل منها.
3. وصف الحركة عامة.

الحل:

1.لدينا معادلة حركة الجسيم:

$$x = \frac{a}{k}(1 - e^{-kt}) \qquad (1)$$

وهي تمثل علاقة $x = f(t)$ ، وبالاشتقاق نحصل على علاقة سرعة الجسيم:

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{a}{k}\,k.\,e^{-kt} = a.\,e^{-kt} \qquad (2)$$

وهي تمثل علاقة $V = f(t)$ ، وبالاشتقاق مرة ثانية نحصل على علاقة تسارع الجسيم:

$$A = \frac{dV}{dt} = -k.a.e^{-kt} \qquad (3)$$

وهي تمثل علاقة $A = f(t)$ ، وبحذف الزمن t بين العلاقتين (1) و (2) نحصل على:

$$V = a\,(1 - \frac{k}{a}x) = a - k.x \qquad (4)$$

وهي تمثل علاقة $V = f(x)$ ، وبحذف الزمن t بين العلاقتين (1) و (3) نحصل على:

$$A = -k.a\,(1 - \frac{k}{a}x) = k^2.x - k.a \qquad (5)$$

وهي تمثل علاقة $A = f(x)$ ، وبحذف الزمن t بين العلاقتين (2) و (3) نحصل على:

$$A = -k.V \qquad (6)$$

وهي تمثل علاقة $A = f(V)$.

2. لحساب القيم العظمى نعين الوضع الابتدائي والسرعة الابتدائية عند الزمن ($t = 0$).

فمن العلاقة (1) :

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0$$

ومن العلاقة (2) :

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad V_0 = a$$

لتعيين x_{max} ، نعدم مشتق العلاقة (1) ، أي أن العلاقة (2) معدومة منه:

$$V = a.e^{-kt} = 0 \quad \Rightarrow \quad a\,(1 - \frac{k}{a}x_{max}) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{max} = \frac{a}{k}$$

بالتعويض في (1) نحصل على الزمن اللازم لهذا الموضع الأعظمي:

$$\frac{a}{k} = \frac{a}{k}(1 - e^{-kt}) \quad \Rightarrow \quad e^{-kt} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \infty$$

أي أن الجسيم يتوقف عن الحركة بعد زمن لانهائي عند الموضع ($x_{max} = a/k$).

3. واضح من العلاقة (6) أن الجسيم يتحرك بتباطؤ دائم، وعلى ذلك فأقصى سرعة للجسيم هي سرعته الابتدائية ($V_0 = a$) عند نقطة الأصل في لحظة البداية، وأكبر تسارع له في هذه اللحظة تساوي:

$$A_{max} = k.a = k.V_0$$

مسألة 7-2-7

يتحرك جسيم في خط مستقيم حركة متباطئة حيث التباطؤ يتناسب عكسا مع مربع المسافة وفق العلاقة:

$$A = -\frac{k}{x^2}$$ حيث k ثابت تناسب

فإذا كانت الشروط الابتدائية للحركة هي:

$$x_0 = 20 \text{ m} \quad , \quad V_0 = 10 \text{ m/sec}$$

المطلوب إيجاد العلاقات:

$$x = f(x) \quad \text{و} \quad V = f(t)$$

إذا علم أن الجسيم انتهى إلى السكون على مسافة لانهائية.

الحل:

لإيجاد علاقة السرعة بدلالة الزمن، لدينا:

$$A = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} = V\frac{dV}{dx} = -\frac{k}{x^2}$$

منه:

$$V.\, dV = -\frac{k}{x^2}dx$$

بالتكامل:

$$\int_V^0 V.\, dV = -k\int_x^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$$

نحصل على:

$$\frac{1}{2}(0 - V^2) = k(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{x}) \quad \Rightarrow \quad V^2 = \frac{2k}{x}$$

لحساب الثابت k نعوض بالشروط الابتدائية:

$$100 = \frac{2k}{20} \quad \Rightarrow \quad k = 1000 \text{ m}^3/\text{sec}^2 \quad (1)$$

بالتعويض نحصل على:

$$V^2 = \frac{2000}{x} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{20\sqrt{5}}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

وهي علاقة تمثل $V = f(x)$.

ولإيجاد علاقة المسافة بدلالة الزمن، تكتب العلاقة (2) بالشكل:

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{20\sqrt{5}}{\sqrt{x}}$$

بفصل المتغيرات نحصل على:

$$\sqrt{x}.\, dx = 20\sqrt{5}.\, dt$$

بالتكامل:

$$\int_{20}^{x} \sqrt{x}.\, dx = 20\sqrt{5} \int_{0}^{t} dt$$

نحصل على:

$$\frac{2}{3}[x^{3/2} - (20)^{3/2}] = 20\sqrt{5}\, t$$

منه:

$$x^{3/2} = 30\sqrt{5}\, t + 40\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad x = [10\sqrt{5}(3t+4)]^{2/3}$$

وهي علاقة تمثل:

$$x = f(t)$$

مسألة -2-8

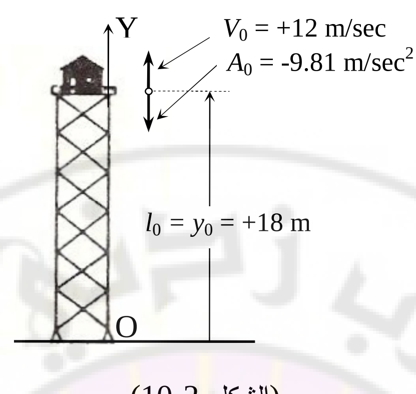
قذفت كرة شاقولياً نحو الأعلى من قمة برج ارتفاعه ($l = 18$ m) بسرعة ($V_0 = 12$ m/sec) كما في (الشكل-2-10)، فإذا كان تسارع الكرة ثابتاً ويساوي ($A = g = 9.81$ m/sec^2)، ويتجه نحو الأسفل.المطلوب:

1. إيجاد سرعة الكرة وارتفاعها عن الأرض عند أي زمن t .
2. إيجاد أقصى ارتفاع يمكن أن تصل إليه الكرة والزمن المقابل له.
3. إيجاد الزمن الذي عنده تصل الكرة إلى الأرض والسرعة التي تسقط بها.
4. رسم المنحنيات: $y = f_1(t) \quad , \quad V = f_2(t)$

الحل:

1. باختيار نقطة الأصل O على سطح الأرض، ومحور الحركة OY نحو الأعلى كما في الشكل، تكون الشروط الابتدائية:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad V_0 = 12\text{ m/sec} \quad , \quad A = -g = -9.81\text{ m/sec}^2$$



(الشكل-2-10)

بالتعويض عن A في العلاقة:

$$\frac{dV}{dt} = A = -9.81$$

نكامل:

$$\int_{V_0=12}^{V} dV = -\int_{t_0=0}^{t} 9.81\, dt \qquad \Rightarrow \qquad V - 12 = -9.81\, t$$

ومنه علاقة السرعة:

$$V = 12 - 9.81\, t \qquad (1)$$

بالتعويض بـــ $(V = \dot{y})$ مع ملاحظة أنه عند $(t = 0)$ يكون $(y_0 = l = 18\ \text{m})$، نحصل على:

$$\dot{y} = V = 12 - 9.81\, t$$

نكامل:

$$\int_{y_0=18}^{y} dy = \int_{t_0=0}^{t} (12 - 9.81\, t)\, dt \qquad \Rightarrow \qquad y - 18 = 12\, t - 4.9\, t^2$$

ومنه علاقة المسافة:

$$y = 18 + 12\, t - 4.9\, t^2 \qquad (2)$$

2. عندما تصل الكرة إلى أقصى ارتفاع تكون $(V = 0)$، بالتعويض في (1) نحصل على زمن حركة القذف:

$$0 = 12 - 9.81\, t \qquad \Rightarrow \qquad t = 1.22\ \text{sec}$$

بالتعويض في (2) عن t نحصل على أقصى ارتفاع:

$$y_{t=1.22} = y_{\max} = 18 + 12 \times 1.22 - 4.9(1.22)^2 = 25.2\ \text{m}$$

3. عندما تصل الكرة سطح الأرض تكون ($y = 0$) وبالتعويض في (2) يكون:

$$0 = 18 + 12\,t - 4.9\,t^2$$

بالحل نحصل على:

$$t = -1.05\ \text{sec} \qquad , \qquad t = 3.5\ \text{sec}$$

سنأخذ الجذر الموجب، أي بعد بدء الحركة الذي يمثل زمن السقوط:

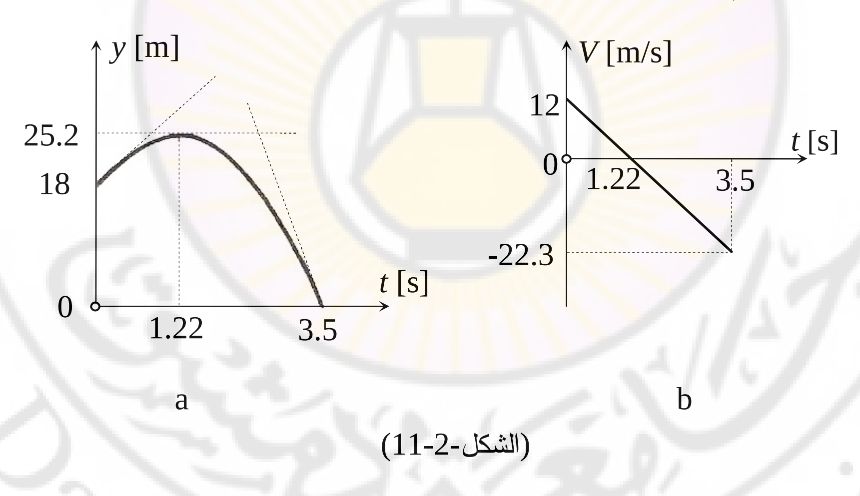
$$t_2 = 3.49\ \text{sec}$$

وبالتعويض في (1) نحصل على سرعة الاصطدام بالأرض:

$$V_{t=3.5} = V_2 = 12 - 9.81 \times 3.5 = -\,22.3\ \text{m/sec}$$

الإشارة السالبة ناتجة من أن الحركة معاكسة لمحور الحركة OY .

4. تبين المنحنيات في (الشكل-2-3) العلاقة بين كل من قيم الموضع y مع الزمن t $[y = f_1(t)]$ كما في (الشكل-2-11a)، وقيم السرعة V مع الزمن t $[V = f_2(t)]$ كما في (الشكل-2-11b).



(الشكل-2-11)

مسألة 2-9

قطار يسير بسرعة ($V_0 = 54$ km/h)، شد السائق جهاز الكبح فوقف القطار بعد زمن قدره ($t = 2$ min)، فإذا كانت الحركة في أثناء الكبح متباطئة بانتظام، المطلوب تعيين المسافة التي يقطعها القطار ليقف.

الحل:

تعطى معادلات الحركة المتباطئة بـــ:

$$x - x_0 = -\frac{1}{2}A.t^2 + V_0.t \qquad (1)$$

$$V = -A.t + V_0 \qquad (2)$$

فعندما يقف القطار بعد زمن ($t = 2\ \text{min}$) تكون سرعته ($V = 0$) وبالتعويض في العلاقة (2) نحسب تباطؤ الحركة:

$$0 = -A.t + V_0 \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{V_0}{t} = \frac{54 \times 1000}{60 \times 2} = 450\ \text{m/min}$$

نعد أن x تقاس بدءاً من مكان شد جهاز الكبح، بالتالي يكون ($x_0 = 0$)، وبالتعويض في العلاقة (1) نحسب المسافة التي قطعها القطار ليقف:

$$x = -\frac{1}{2}V_0.t + V_0.t = \frac{1}{2}V_0.t = \frac{54 \times 1000}{2 \times 60} \times 2 = 900\ \text{m}$$

مسألة -2-10

تسير سيارة بسرعة 90 km/h مقتربة من إشارة مرور، وعندما أصبحت المسافة بينهما 300 m تغيرت إشارة المرور إلى حمراء، فإذا كانت الفترة الزمنية لتغير الإشارة هو 15 sec ، المطلوب إيجاد:

1. مقدار التباطؤ الواجب تطبيقه على السيارة إن أراد سائقها عدم التوقف عند الإشارة، بحيث تتغير إلى اللون الأخضر لحظة وصوله إليها.
2. سرعة السيارة لحظة اجتيازها الإشارة.

الحل:

1. يحسب مقدار التباطؤ من معادلة الحركة المتباطئة:

$$\Delta x = x - x_0 = -\frac{1}{2}A.\,t^2 + V_0.\,t$$

بفرض موضع السيارة لحظة تغير إشارة المرور هو مبدأ قياس المسافة فيكون لدينا:

$$x_0 = 0 \qquad , \qquad t = 15\ \text{sec} \qquad , \qquad V_0 = 90\ \text{km/h} = 25\ \text{m/sec}$$

بالتعويض نحصل على قيمة التباطؤ:

$$A = 0.66\ \text{m/sec}^2$$

2. يحسب مقدار السرعة من معادلة السرعة:

$$V = -A.\,t + V_0$$

حيث:

$$t = 15\ \text{sec} \qquad , \qquad V_0 = 25\ \text{m/sec} \qquad , \qquad A = 0.66\ \text{m/sec}^2$$

بالتعويض نحصل على قيمة السرعة:

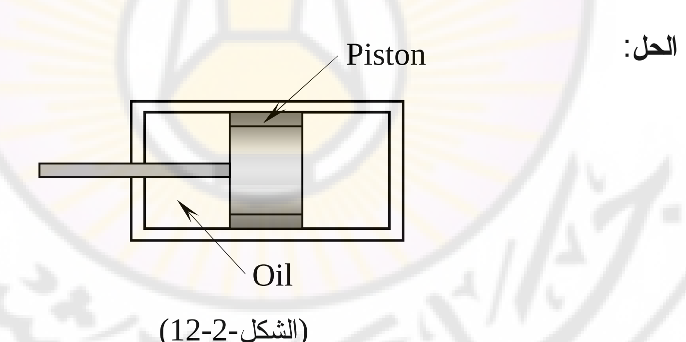
$$V = 15\ \text{m/sec} = 54\ \text{km/h}$$

مسألة 2-2-11

يتكون الجهاز المستعمل لإيقاف الحركة في بعض الآلات من أسطوانة مملوءة بالزيت كما هو مبين في (الشكل-2-12)، وفيها مكبس به ثقوب لجريان الزيت خلاله في أثناء حركة المكبس، ويوصل المكبس بذراع يتصل بدوره إلى الآلة.

فإذا تحرك الذراع بسرعة ابتدائية V_0 مسبباً جريان الزيت عبر ثقوب المكبس، وبالتالي يتحرك المكبس بتباطؤ يعطى بالعلاقة ($A = -\,k\,.\,V$) حيث k معامل التخامد، المطلوب إيجاد معادلات الحركة، ورسم المنحنيات المقابلة لها، مفترضاً ($x_0 = 0$).

الحل:



(الشكل-2-12)

لإيجاد علاقة $V = f\,(t)$ لدينا:

$$\frac{dV}{dt} = A = -\,k.\,V \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dV}{V} = -k\,.dt$$

بالتكامل نحصل على العلاقة المطلوبة:

$$\int_{V_0}^{V} \frac{dV}{V} = -\,k \int_{t_0=0}^{t} dt \qquad \Rightarrow \qquad \ln\frac{V}{V_0} = -k.\,t$$

$$\frac{V}{V_0} = e^{-kt} \qquad \Rightarrow \qquad V = V_0.\,e^{-kt} \qquad (1)$$

ومنحني العلاقة $V = f\,(t)$ مبين في (الشكل-2-13a).

ولإيجاد علاقة $A = f(t)$ لدينا:

$$A = -k.V = -k.V_0.e^{-kt} \qquad (2)$$

ومنحني العلاقة $A = f(t)$ مبين في (الشكل-2-13b).

ولإيجاد علاقة $x = f(t)$ لدينا:

$$V = \frac{dx}{dt} = V_0.e^{-kt} \quad \Rightarrow \quad dx = V_0.e^{-kt}.dt$$

بالتكامل نحصل على العلاقة المطلوبة:

$$\int_{x_0=0}^{x} dx = V_0\int_{t_0=0}^{t} e^{-kt}.dt \quad \Rightarrow \quad x = \frac{V_0}{k}(1-e^{-kt}) \qquad (3)$$

ومنحني العلاقة $x = f(t)$ مبين في (الشكل-2-13c).

ولإيجاد علاقة $V = f(x)$ لدينا:

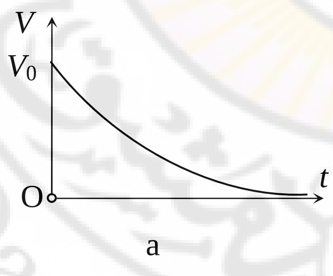
$$A = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}.\frac{dx}{dt} = V\frac{dV}{dx} = -k.V \quad \Rightarrow \quad dV = -k.dx$$

بالتكامل نحصل على العلاقة المطلوبة:

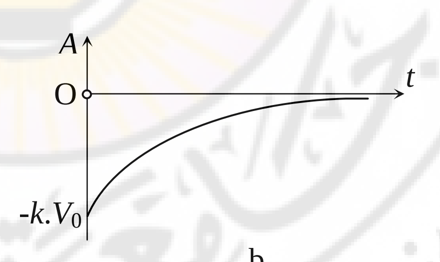
$$\int_{V_0}^{V} dV = -k\int_{x_0=0}^{x} dx \quad \Rightarrow \quad V - V_0 = -k.x$$

$$V = V_0 - k.x \qquad (4)$$

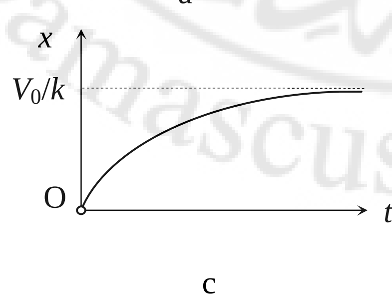
ومنحني العلاقة $V = f(t)$ مبين في (الشكل-2-13d).



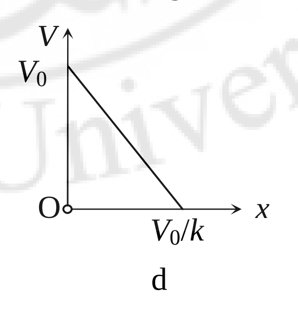
a



b



c



d

(الشكل-2-13)

مسألة -2-12

المسافة بين بلدتين B و E هي 2 km ، يقوم قطار من B دون سرعة ابتدائية وبحركة متسارعة بانتظام، فيقطع مسافة 400 m حتى تصبح سرعته 60 km/h ، ثم تغدو حركته منتظمة، وفي المرحلة الأخيرة من رحلته تصبح حركته متباطئة بانتظام، فيصل إلى E دون سرعة بعد أن يكون قد قطع في هذه المرحلة مسافة 600 m .

المطلوب إيجاد معادلات الحركة الموافقة للمراحل الثلاث، ورسم مخططات الحركة.

الحل:

نعد الاتجاه من B إلى E هو الاتجاه الموجب على مسار القطار، ولتكن B مبدأ لقياس المسافة، ولحظة الانطلاق منها مبدأ لقياس الزمن.

المرحلة الأولى: نفترض أن هذه المرحلة تبدأ من B وتنتهي في C ، وأن الحركة خلالها تكون حركة مستقيمة متسارعة معطاة بالعلاقة:

$$x = \frac{1}{2} A_1 . t^2 + V_{01} . t + x_{01} \qquad (1)$$

والعلاقة بين المسافة والسرعة هي:

$$V^2 - V_{01}^2 = 2A_1 (x - x_{01}) \qquad (2)$$

فبما أن القطار بدأ حركته من الموضع B في لحظة البدء، وبدون سرعة ابتدائية فيكون:

$$x_{01} = x_B = 0 \quad , \quad V_{01} = V_B = 0$$

وبما أن القطار وصل إلى الموضع C الذي فصله ($x_C = 400$ m) بسرعة:

$$V_C = 60 \times 1000 / 3600 = 50/3 \text{ m/sec}$$

بتطبيق العلاقة (2) عند الموضع C يكون:

$$(50/3)^2 = 2A_1 (400)$$

ومنه تسارع حركة المرحلة الأولى:

$$A_1 = (25/72)\, t_1^2$$

وبتطبيق العلاقة (1) يكون:

$$400 = (25/144)\, t_1^2 \quad \Rightarrow \quad t_1^2 = 2304 \sec^2$$

منه زمن المرحلة الأولى:

$$t_1 = 48 \sec$$

وبالتالي معادلة الحركة للمرحلة الأولى هي في الشكل:

$$x = (25/144)\, t^2 \qquad (3)$$

المرحلة الثانية: تبدأ المرحلة الثانية من C وتنتهي في D ، وأن الحركة خلالها تكون حركة مستقيمة منتظمة معطاة بالعلاقات:

$$x = V_2.t + x_{02} \qquad (4)$$

$$A_2 = 0$$

فبما أن القطار بدأ حركته من الموضع C ، بسرعة ابتدائية V_C فيكون:

$$x_{02} = x_C = 400 \text{ m} \qquad , \qquad V_{02} = V_C = V_2 = 50/3 \text{ m/sec}$$

وبما أن القطار وصل إلى الموضع D الذي فصله (x_D = 1400 m) بسرعة ($V_D = V_2$) وبتطبيق العلاقة (4) عند الموضع D نحصل على زمن المرحلة الثانية:

$$1400 = (50/3)t_2 + 400 \qquad \Rightarrow \qquad t_2 = 60 \text{ sec}$$

وتكون معادلة الحركة للمرحلة الثانية هي في الشكل:

$$x = (50/3).t + 400 \qquad (5)$$

المرحلة الثالثة: تبدأ المرحلة الثالثة من D وتنتهي في E ، وأن الحركة خلالها تكون حركة مستقيمة متباطئة معطاة بالعلاقات:

$$x = -\frac{1}{2}A_3.t^2 + V_{03}.t + x_{03} \qquad (6)$$

$$V = -A_3.t + V_{03} \qquad (7)$$

والعلاقة بين المسافة والسرعة هي:

$$V^2 - V_{03}^2 = -2A_3\,(x - x_{03}) \qquad (8)$$

فبما أن القطار بدأ حركته من الموضع D الذي فصله x_D بسرعة ابتدائية V_D فيكون:

$$x_{03} = x_D = 1400\,m \qquad , \qquad V_{03} = V_D = 50/3 \text{ m/sec}$$

وبما أن القطار وصل إلى الموضع E الذي فصله (x_E = 2000 m) بسرعة معدومة ($V_E = 0$)، وبتطبيق العلاقة (8) عند الموضع E نحصل على تباطؤ المرحلة الثالثة:

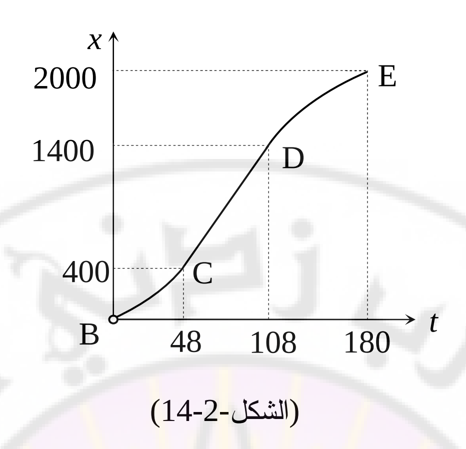
$$-(50/3)^2 = -2A_3\,(2000 - 1400) \qquad \Rightarrow \qquad A_3 = (25/108) \text{ m/sec}^2$$

وبتطبيق العلاقة (7) نحصل على زمن الحركة:

$$0 = -(25/108).t_3 + 50/3 \qquad \Rightarrow \qquad t_3 = 72 \text{ sec}$$

وبالتالي معادلة الحركة للمرحلة الثالثة هي في الشكل:

$$x = -\frac{1}{2}(25/108).t^2 + (50/3).t + 1400 \qquad (9)$$



(الشكل-2-14)

أما مخطط الحركة فينقسم إلى:

مخطط المرحلة الأولى من الحركة وهو القوس BC من قطع مكافئ محوره منطبق على محور الفواصل، وذروته هو المبدأ B كما في (الشكل-2-14).

ومخطط المرحلة الثانية من الحركة وهو القطعة المستقيمة CD ، التي تصل النقطة (C(48,400 بالنقطة (D(108,1400، وتمس القوس BC في النقطة C .

ومخطط المرحلة الثالثة من الحركة وهو القوس DE من قطع مكافئ محوره مواز لمحور الفواصل، وذروته تقع في (E(180,2000 ، ويمس القطعة المستقيمة في النقطة D .

2- الحركة المستقيمة لمجموعة جسيمات مادية

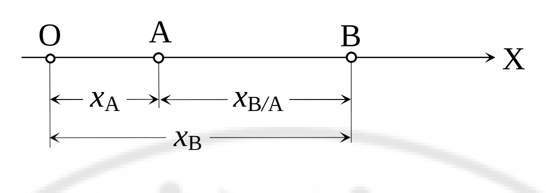
Rectilinear Motion of Several Particles

2-1-.الحركة النسبية لجسيمين ماديين *Relative Motion of Two Particles*

نعد جسيمين ماديين A و B يتحركان على الخط المستقيم OX نفسه كما هو مبين في (الشكل-2-15)، حيث إحداثيات موضعهما x_A و x_B مقاسه من نفس نقطة المبدأ O ، يعين الفرق ($x_B - x_A$) موضع الجسيم B بالنسبة للجسيم A ، يرمز له بـــ $x_{B/A}$ أو x_{BA} ، ويحدد من العلاقة التالية:

$$x_B = x_A + x_{B/A} \qquad \Rightarrow \qquad x_{B/A} = x_B - x_A \qquad (21\text{-}2)$$

تعني الإشارة الموجبة أن الجسيم B هي على يمين A ، والإشارة السالبة تدل على أن الجسيم B تكون على يسار الجسيم A ، دون النظر إلى موضع كل من A و B بالنسبة لنقطة الأصل.



(الشكل-2-15)

إن معدل تغير $x_{B/A}$ بالنسبة للزمن يعرف بالسرعة النسبية (*Relative Velocity*) للجسيم B بالنسبة للجسيم A ، ويرمز له بـ $V_{B/A}$ ، وهكذا باشتقاق العلاقة (2-21) بالنسبة للزمن نحصل على:

$$V_B = V_A + V_{B/A} \quad \Rightarrow \quad V_{B/A} = V_B - V_A \qquad (22\text{-}2)$$

وتعني إشارة $V_{B/A}$ الموجبة أن الجسيم المادي B يتحرك في الاتجاه الموجب عند مراقبته من الجسيم A ، والإشارة السالبة تعني العكس، أي أن الجسيم يتحرك في الاتجاه السالب.

إن معدل تغير $V_{B/A}$ بالنسبة للزمن يعرف بالتسارع النسبي للجسيم المادي (*Relative Acceleration*) B بالنسبة A ، ويرمز له بـ $A_{B/A}$ ، ولذا باشتقاق العلاقة (2-22) بالنسبة للزمن نحصل على:

$$A_B = A_A + A_{B/A} \quad \Rightarrow \quad A_{B/A} = A_B - A_A \qquad (23\text{-}2)$$

مسألة 2-13-

قذفت كرة B شاقولياً إلى أعلى من ارتفاع 12 m في بئر مصعد كهربائي بسرعة ابتدائية 15 m/sec ، وفي نفس اللحظة كان يمر مصعد E من النوع المفتوح على ارتفاع 3 m ، متحركاً إلى الأعلى بسرعة منتظمة قدرها 1.5 m/sec . المطلوب إيجاد:

1. الزمن والارتفاع الذي عنده تصدم الكرة المصعد.
2. السرعة النسبية للكرة بالنسبة للمصعد عند التصادم.

الحل:

1. لإيجاد الزمن والارتفاع الذي عنده تصدم الكرة المصعد، ندرس حركة كل من الكرة والمصعد، باختيار نقطة الأصل O عند مستوي الأرض، والاتجاه الموجب لمحور الحركة إلى الأعلى، وندرس:

حركة الكرة B الموضحة في (الشكل-2-16a)

ستتحرك الكرة بتسارع ثابت قدره تسارع الجاذبية:

$$A_B = g = 9.81 \text{ m/sec}^2 \quad \downarrow$$

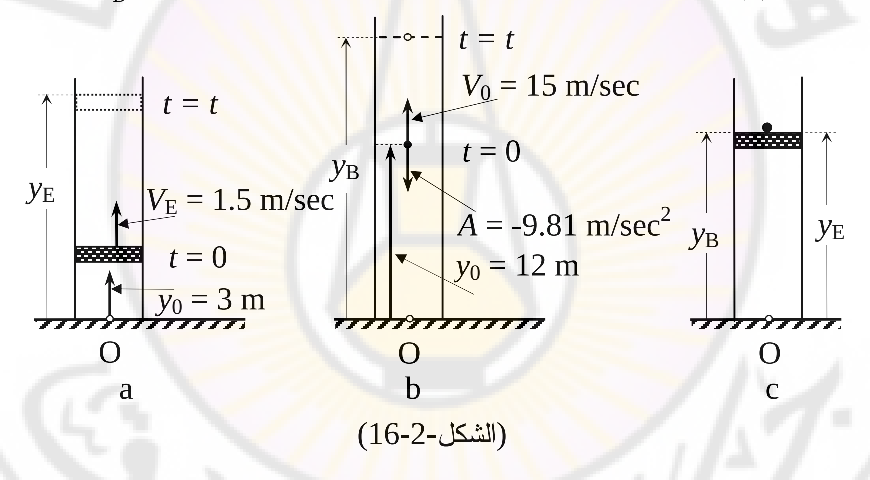
وحركتها متباطئة بانتظام وفق العلاقات:

$$y_B = -\frac{1}{2} A_B . t^2 + V_{0B} . t + y_{0B} \quad , \quad V_B = -A_B . t + V_{0B}$$

وبالتعويض بالمعطيات ($y_{0B} = 12$ m) و ($V_{0B} = 15$ m/sec) في معادلات الحركة نحصل على:

$$y_B = 12 + 15\,t - 4.9 . t^2 \qquad (1)$$

$$V_B = 15 - 9.81\,t \qquad (2)$$



(الشكل-2-16)

حركة المصعد E الموضحة في (الشكل-2-16b)

يتحرك المصعد بسرعة ثابتة قدرها:

$$V_E = 1.5 \text{ m/sec}$$

وحركته حركة منتظمة وفق العلاقة:

$$y_E = V_E . t + y_{0E}$$

وبالتعويض بالمعطيات ($y_{0E} = 3$ m) في معادلة الحركة نحصل على:

$$y_E = 3 + 1.5 . t \qquad (3)$$

مرحلة التصادم الموضحة في (الشكل-2-16c)

بما أننا اخترنا نفس نقطة الأصل O ونفس الزمن t فعند التصادم يكون:

$$y_B = y_E$$

بالتعويض من (2) و (3) نحصل على:

$$3+1.5\,t=12+15\,t-4.9.t^2 \qquad \Rightarrow \qquad 4.9\,t^2-13.5\,t-9=0$$

معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة للزمن، بحلها نحصل على:

$$t=-0.55\,\text{sec} \qquad , \qquad t=+3.31\,\text{sec}$$

سنعد فحسب الزمن (t = 3.31 sec) الذي عنده تصدم الكرة المصعد، أي بعد بدء الحركة، وبالتعويض في (3) نحصل على الارتفاع عند التصادم:

$$y_{\text{B}}=y_{\text{E}}=3+1.5\times3.31=8\text{ m}$$

2. تعطى السرعة النسبية للكرة بالنسبة للمصعد بالعلاقة:

$$V_{\text{B/E}}=V_{\text{B}}-V_{\text{E}}$$

وبالتعويض بقيمهما يكون:

$$V_{\text{B/E}}=15-9.81\,t-1.5$$

بالتعويض عن (t = 3.31 sec) يكون:

$$V_{\text{B/E}}=-18.97\text{ m/sec}$$

والإشارة السالبة تعني أن الكرة تشاهد من المصعد متحركة في الاتجاه السالب أي إلى أسفل.

2-2- الحركة المستقلة لجسيمات مادية

Independent Motion of Several Particles

إذا تحركت مجموعة من الجسيمات المستقلة عن بعضها بعضاً على خط واحد، وكان لكل جسيم معادلة حركة خاصة مستقلة عن الأخرى، ففي هذه الحالة يؤخذ الزمن بدءاً من فترة أولية واحدة بالنسبة لجميع الجسيمات، وكذلك يجب قياس المسافة بدءاً من مبدأ واحد بالنسبة لجميع الجسيمات أيضاً، وبالاتجاه نفسه.

مسألة 2-14-

إذا كان الجسيم المادي M يتحرك على محور OX بحركة معادلتها الزمنية:

$$x_{\text{M}}=t\,(t+3)^2$$

وكان الجسيم N يتحرك على المحور نفسه بحركة معادلتها الزمنية:

$$x_{\text{N}}=3\,t+t^2$$

حيث t بالثواني و x بالأمتار. المطلوب:

1. رسم مخططي الحركتين، وبين كيف ينتقل الجسيمان على مسارهما.
2. تعيين زمان التقاء المتحركين ومكانهما.

الحل:

1. لدراسة حركة الجسيم M ،

نحدد علاقة سرعة الجسيم:

$$V_M = \dot{x}_M = 3\,(t+1)\,(t+3)$$

وعلاقة تسارع الجسيم:

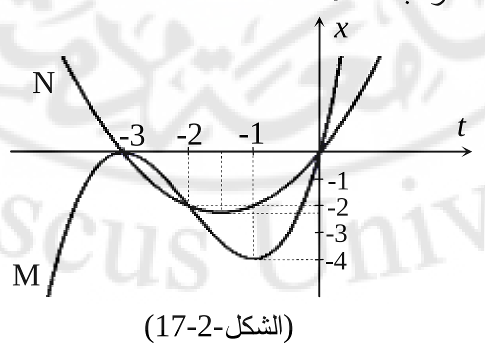
$$A_M = \ddot{x}_M = 6\,(t+2)$$

نضع جدولاً نبين فيه تغيرات كل من A_M , V_M , x_M .

t	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$
V_M	$+\infty$ +	0 -	-3 -	0 +	$+\infty$
A_M	$-\infty$ -	6 -	0 +	6 +	$+\infty$
$A_M . V_M$	-	+	-	+	
x_M	$-\infty$	0	- 2	- 4	$+\infty$
	حركة تقدمية متباطئة	حركة عكسية متسارعة	حركة عكسية متباطئة	حركة تقدمية متباطئة	

نلاحظ من الجدول ما يلي:

يبدأ الجسيم M حركته من ($x = -\infty$) في اللحظة ($t = -\infty$) بحركة تقدمية متباطئة، إلى أن تنعدم سرعته في نقطة البدء في اللحظة ($t = -3$ sec)، ويعود الجسيم بعد ذلك بحركة رجعية أي عكسية متسارعة، إلى أن يصل الموضع ($x = -2$ m) في اللحظة ($t = -2$ sec)، ويتابع الجسيم سيره بعد ذلك بحركة عكسية متباطئة، إلى أن تنعدم سرعته في اللحظة ($t = -1$ sec) في الموضع ($x = -4$ m)، تعود الحركة بعد ذلك تقدمية متسارعة فيمتد على مساره بلا تناه.



(الشكل-2-17)

كما نلاحظ من (الشكل-2-17) أن المنحني $x_M = f(t)$ يقطع محور الزمن في اللحظة ($t = 0$).

ولدراسة حركة الجسيم N ،

نحدد علاقة سرعة الجسيم:

$$V_N = \dot{x}_N = 3 + 2\,t$$

وعلاقة تسارع الجسيم:

$$A_N = \ddot{x}_N = 2$$

أما جدول التغيرات لـ A_N , V_N , x_N فهو:

t	$-\infty$	$-3/2$	$+\infty$
V_N	$-\infty$ $-$	0 $-$	$+\infty$
A_N	0 $+$	-2 $-$	2
$A_N . V_N$	$-$	$+$	
x_N	$+\infty$	$-9/4$	$+$
	حركة عكسية متباطئة	حركة تقدمية متسارعة	

نلاحظ من هذا الجدول ما يلي:

يبدأ الجسيم N حركته من ($x = +\infty$) في اللحظة ($t = -\infty$) بحركة رجعية متباطئة، إلى أن تنعدم سرعته في اللحظة ($t = -3/2$ sec) في الموضع ($x = -9/4$ m)، يعود الجسيم بعد ذلك بحركة تقدمية متسارعة مبتعداً عن مساره بلا تناه.

نلاحظ من (الشكل-2-17) أن المنحني $x_N = f\,(t)$ يقطع محور الزمن في اللحظة ($t = 0$) و ($t = -3$ sec).

3. يلتقي المتحركان في اللحظات:

$$t = 0 \quad , \quad t = -2\,\text{sec} \quad , \quad t = -3\,\text{sec}$$

وذلك في المواضع:

$$x = 0 \quad , \quad x = -2\,\text{m} \quad , \quad x = 0$$

هذا ويمكن الوصول إلى هذه النتيجة بيانياً كما هو واضح على (الشكل-2-17).

مسألة 2-15-

تسير سيارة صغيرة خلف سيارة قاطرة بمسافة 10 m ، حيث سرعة السيارتين متساوية وتساوي 50 km/h ، فإذا أراد سائق السيارة الصغيرة أن يتجاوز السيارة الكبيرة بصورة تصبح أمامها بمسافة 10 m .

المطلوب حساب أقل زمن يمكن أن يحقق هذه الحركة مع العلم أن السرعة العظمى المسموح بها 90 km/h ، وأن للسيارة تسارعاً أعظمياً يبلغ $2.25\ m/sec^2$ ، وتباطؤاً أعظمياً مقداره $9\ m/sec^2$.

الحل:

هناك مرحلتان لحركة السيارة الصغيرة وهما:

مرحلة الحركة المتسارعة وتمثل وصول السيارة الصغيرة بمحاذاة السيارة القاطرة.

خلالها تتحرك السيارة القاطرة حركة مستقيمة منتظمة وفق العلاقة:

$$\Delta x_{11} = V_{01}.t_1 \qquad (1)$$

وتتحرك السيارة الصغيرة حركة مستقيمة متسارعة بانتظام وفق العلاقتين:

$$\Delta x_{21} = \frac{1}{2} A_1.t_1^2 + V_{02}.t_1 \qquad (2)$$

$$V_{21} = A_1.t_1 + V_{02} \qquad (3)$$

حيث لدينا:

$$\Delta \boldsymbol{x}_{21} = \Delta \boldsymbol{x}_{11} + 10 \, , \boldsymbol{V}_{01} = \boldsymbol{V}_{02} = 50 \text{ km/h} = 13.9 \text{ m/sec} \, , \boldsymbol{A}_1 = 2.25 \text{ m/sec}^2$$

بالتعويض نحصل على:

$$\Delta x_{11} = 13.9\, t_1 \qquad (1^*)$$

$$13.9\, t_1 + 10 = \frac{1}{2} 2.25\, t_1^2 + 13.9\, t_1 \qquad (2^*)$$

زمن المرحلة الأولى:

$$t_1^2 = 20/2.25 = 8.88 \sec^2 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = 2.98 \sec$$

والمسافة التي قطعتها السيارة القاطرة:

$$\Delta x_{11} = 13.9 \times 2.98 = 41.44 \text{ m}$$

والمسافة التي قطعتها السيارة الصغيرة:

$$\Delta x_{21} = 41.44 + 10 = 51.44 \text{ m}$$

وسرعة السيارة الصغيرة:

$$V_{21} = 2.25 \times 2.98 + 13.9 = 20.6 \text{ m/sec} = 74.16 \text{ km/h} \qquad (3^*)$$

وهي أقل من السرعة العظمى المسموح بها 90 km/h .

مرحلة الحركة المتباطئة وتمثل تقدم السيارة الصغيرة على السيارة القاطرة:

خلالها تتحرك السيارة القاطرة حركة مستقيمة منتظمة وفق العلاقة:

$$\Delta x_{12} = V_{01}.t_2 \qquad (4)$$

وتتحرك السيارة الصغيرة حركة مستقيمة متباطئة بانتظام وفق العلاقتين:

$$\Delta x_{22} = -\frac{1}{2} A_1.t_1^2 + V_{02}.t_1 \qquad (5)$$

$$V_{22} = -A_1.t_1 + V_{02} \qquad (6)$$

حيث لدينا:

$$\Delta x_{22} = (\Delta x_{12} + 10)\text{m} \, , V_{01} = V_{02} = 50 \text{ km/h} = 13.9 \text{ m/sec} \, , \, A_2 = 2 \text{ m/sec}^2$$

بالتعويض نحصل على:

$$\Delta x_{12} = 13.9 \, t_2 \qquad (4^*)$$

$$13.9 \, t_2 + 10 = -\frac{1}{2} 2 \, t_2^2 + 20.6 \, t_1 \quad \Rightarrow \quad t_2^2 - 6.7 \, t_2 + 10 = 0 \qquad (2^*)$$

معادلة من الدرجة الثانية لزمن المرحلة الثانية، بحلها نحصل على:

$$t_2^* = 4.45 \text{ sec} \quad , \quad t_2^{**} = 2.244 \text{ sec}$$

تعني هذه النتيجة أن كلا الزمنين يحقق الحركة المطلوبة، وحسب شروط المسألة نختار الزمن الأصغر: $t_2 = 2.244 \text{ sec}$

وتكون المسافة التي قطعتها السيارة القاطرة:

$$\Delta x_{12} = 13.9 \times 2.244 = 31.19 \text{ m}$$

والمسافة التي قطعتها السيارة الصغيرة:

$$\Delta x_{22} = 31.19 + 10 = 41.19 \text{ m}$$

ويكون الزمن اللازم لهاتين المرحلتين:

$$t_{\text{tot.}} = t_1 + t_2 = 2.98 + 2.24 = 5.22 \text{ sec}$$

والمسافة الكلية التي قطعتها السيارة الصغيرة:

$$\Delta x_{2\,\text{tot}} = \Delta x_{21} + \Delta x_{22} = 51.44 + 41.19 = 92.63 \text{ m}$$

2-3- الحركة غير المستقلة لجسيمات مادية

Dependent Motion of Several Particles

يعتمد أحياناً موضع جسيم مادي على موضع جسيم مادي آخر، أو حتى على عدة جسيمات مادية أخرى، يقال في هذه الحالة إن الحركة غير مستقلة، فموضع الجسم B في الجملة الموضحة في (الشكل-2-18a) يعتمد على موضع الجسم A .

تتم دراسة الحركة باختيار نقطة الأصل O عند الخط الأفقي الثابت، والاتجاه الموجب لمحور الحركة OY إلى الأسفل.

بما أن الخيط لا يمتط فإن الطول ACDEFG يبقى ثابتاً، لذا فطول أجزاء الخيط CD و EF الملفوف حول البكرات يبقى ثابتا، من ذلك نستنتج أن مجموع أطوال الأجزاء AC و DE و FG ثابت، وبملاحظة أن طول الجزء AC يختلف عن y_A بمقدار ثابت، وأيضا بشكل مشابه فإن طول الجزأين DE و FG يختلف عن y_B بمقدار ثابت، لذا يمكن أن نكتب عند الوضع الابتدائي للجملة ما يلي:

$$y_{0A} + 2y_{0B} = \text{Const.} \qquad (24\text{-}2)$$

في هذه الجملة يمكن فحسب اختيار أحد هذين الإحداثيين كيفياً لإيجاد الإحداثي الآخر، لذا نقول إن المجموعة المبينة في (الشكل-2-18a) لها درجة واحدة من الحرية (*One Degree of Freedom*).

إذا تحركت الجملة بحيث يهبط أحد الجسمين والآخر يصعد، فالعلاقة (2-24) تبقى صحيحة، ويمكن أن نكتب عند الوضع الجديد للجملة ما يلي:

$$y_{1A} + 2y_{1B} = \text{Const.}$$

بطرح العلاقتين نحصل على:

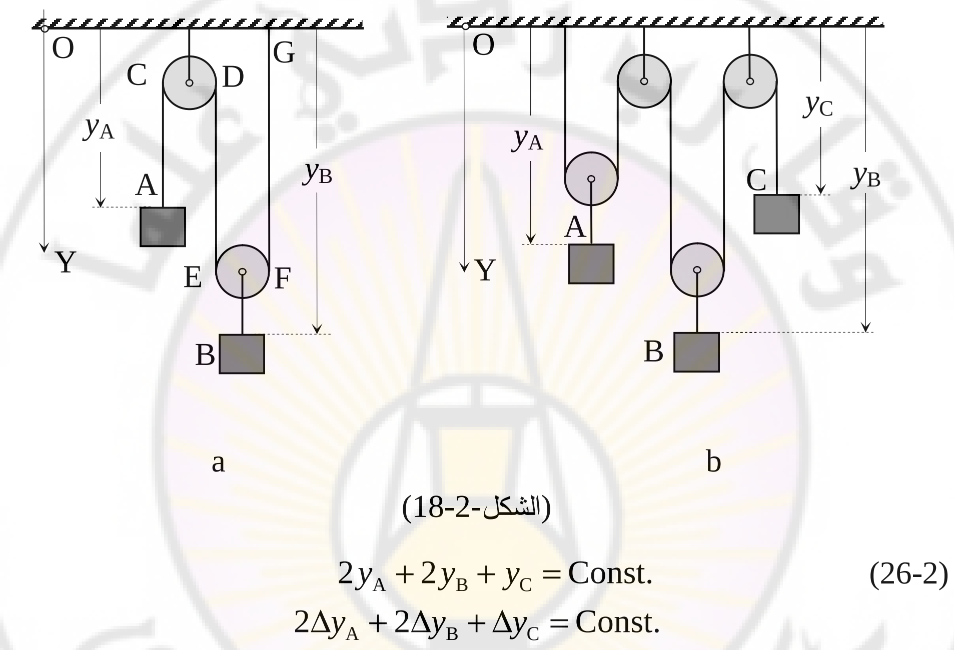
$$\Delta y_A + 2\Delta y_B = 0 \qquad (25\text{-}2)$$

نستنتج أنه إذا أعطينا y_A زيادة مقدارها Δy_A أي أن الجسم A يهبط بمقدار Δy_A فإن الإحداثية y_B تتغير بالمقابل وتزداد بمقدار:

$$\Delta y_B = -\Delta y_A / 2$$

أي أن الجسم B سيرتفع بنصف المقدار Δy_A ، ويمكن التأكد من ذلك بسهولة من العلاقة (2-25).

في حالة ثلاثة أجسام (الشكل-2-18b) نلاحظ ثانية أن أطوال الخيط المارة حول البكرات هي ثابتة، واستناداً لــ(2-24) تتحقق العلاقة بمواضع إحداثيات الأجسام الثلاثة، واستناداً لــ(2-25) تتحقق العلاقة بتغير إحداثيات الأجسام الثلاثة.



(الشكل-2-18)

$$2y_A + 2y_B + y_C = \text{Const.} \qquad (26\text{-}2)$$

$$2\Delta y_A + 2\Delta y_B + \Delta y_C = \text{Const.}$$

ونلاحظ أن اثنين من الإحداثيات يمكن اختيارهما كيفياً، فنقول إن المجموعة المبينة في (الشكل-2-18b) لها درجتان من الحرية (*Two Degrees of Freedom*).

إذا كانت العلاقة بين إحداثيات الموضع لعدة أجسام صلبة خطية فإن العلاقة بين سرعتها وتسارعها خطية أيضاً.

ففي حالة الجملة المبيّنة في (الشكل-2-18b)، وبإجراء عمليتي اشتقاق نحصل على المعادلات التالية:

$$2\dot{y}_A + 2\dot{y}_B + \dot{y}_C = 2V_A + 2V_B + V_C = 0 \qquad (27\text{-}2)$$

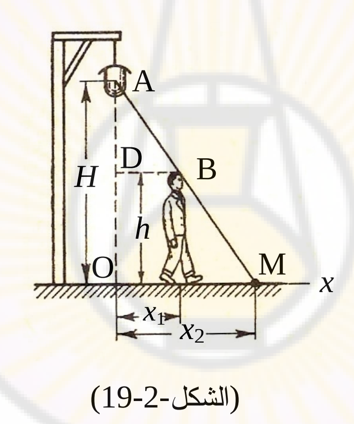
$$2\ddot{y}_A + 2\ddot{y}_B + \ddot{y}_C = 2A_A + 2A_B + A_C = 0 \qquad (28\text{-}2)$$

مسألة -2-16

يبتعد شخص طوله h ، متحركاً في خط مستقيم بسرعة U ، عن مصباح معلق على ارتفاع H . المطلوب إيجاد سرعة حركة نهاية ظل الشخص.

الحل:

لإيجاد سرعة حركة نهاية ظل الشخص، نحسب المعادلة التي تتحرك وفقها نهاية الظل، حيث نلاحظ أن موضع الظل يعتمد على موضع الشخص، لذا نعد النقطة O التي تقع على خط رأسي واحد مع المصباح كنقطة لبداية القياس، ونمد المحور OX على امتداد المستقيم الذي تتحرك عليه نهاية الظل كما هو مبين في (الشكل-2-19)، ونعد الشخص المتحرك في وضع اختياري يبعد بمسافة x_1 عن مبدأ القياس O ، وعندئذ تبعد نهاية ظله عن المبدأ بمسافة x_2 .



(الشكل-2-19)

نجد من تشابه المثلثين ΔDAB و ΔOAM ، أن:

$$x_2 = \frac{H}{H - h} x_1$$

تعبر هذه العلاقة عن معادلة حركة نهاية الظل M ، إذا عرف معادلة حركة الشخص، أي إذا عرف $x_1 = f(t)$.

نفاضل طرفي المعادلة السابقة:

$$\dot{x}_2 = \frac{H}{H - h} \dot{x}_1$$

بما أن:

$$\dot{x}_1 = U_X = U \qquad , \qquad \dot{x}_2 = V_X = V$$

بالتعويض نحصل على السرعة المطلوبة:

$$V = \frac{H}{H - h} U$$

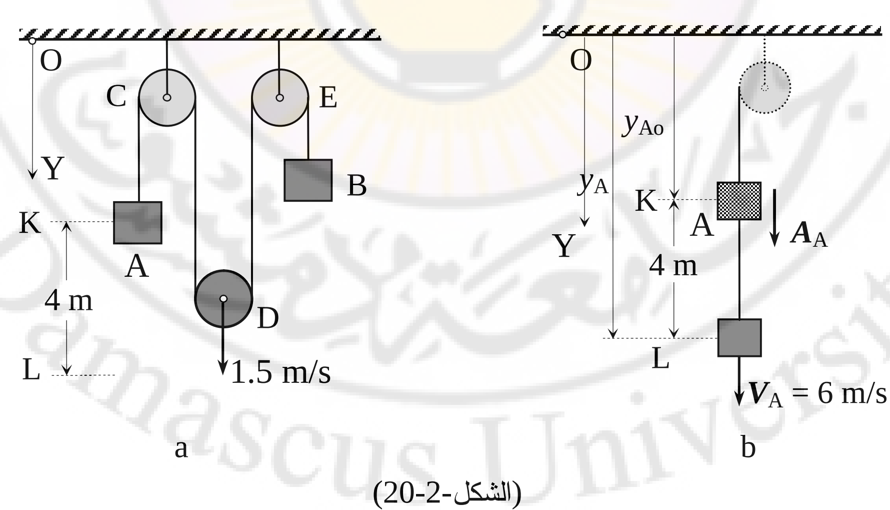
فإذا تحرك الشخص بسرعة ثابتة (U = const)، فإن سرعة حركة نهاية ظله تكون أيضاً ثابتة، ولكنها أكبر من سرعته بـــ [($H /(H-h)$] مرة.

مسألة 2-16-

كتلتان A و B متصلتان بحبل يمر على ثلاث بكرات C و D و E كما في (الشكل-2-20a)، حيث البكرتان C و E مثبتتان بينما البكرة D تتحرك إلى الأسفل بحركة منتظمة بسرعة قدرها (V_D = 1.5 m/sec)، وعند الزمن (t = 0) تبدأ الكتلة A في التحرك إلى الأسفل من الموضع K بتسارع ثابت وبدون سرعة ابتدائية.

فإذا كانت سرعة الكتلة A عند مرورها بالموضع L هي (V_A = 6 m/sec)، المطلوب إيجاد التغير في الارتفاع وسرعة الكتلة B وتسارعها عند مرور الكتلة A بالموضع L ، علماً أن (KL = 4 m).

الحل:



(الشكل-2-20)

ندرس حركة كل من الأجسام A و D و B باختيار نقطة الأصل O عند السطح العلوي، والاتجاه الموجب لمحور الحركة OY إلى الأسفل.

حركة الكتلة A الموضحة في (الشكل2-20b):

تبدأ الكتلة A حركتها من الموضع K ، وتنتهي في الموضع L ، والحركة خلالها هي حركة مستقيمة متسارعة حيث:

العلاقة بين المسافة والسرعة تعطى بـــ:

$$V_A^2 - V_{A0}^2 = 2A_A.\Delta y_A \qquad (1)$$

والعلاقة بين الزمن والسرعة تعطى بـــ:

$$V_A = A_A.t + V_{A0} \qquad (2)$$

وبما أن الكتلة A بدأت حركتها من الموضع K في لحظة البدء بدون سرعة ابتدائية فيكون:

$$V_{A0} = 0$$

وبما أن الكتلة A وصلت إلى الموضع L بسرعة:

$$V_A = 6 \text{ m/sec}$$

بعدما قطعت مسافة:

$$\Delta y_A = \text{KL} = 4 \text{ m}$$

بالتعويض بالعلاقة (1) نحصل على تسارع الكتلة A :

$$A_A = 4.5 \text{ m/sec}^2$$

بالتعويض بالعلاقة (2) نحصل على زمن الحركة:

$$t = 1.333 \text{ sec}$$

حركة البكرة D الموضحة في (الشكل2-21a):

تتحرك البكرة D حركة منتظمة بسرعة ($V_D = 1.5$ m/sec)، وفق العلاقة:

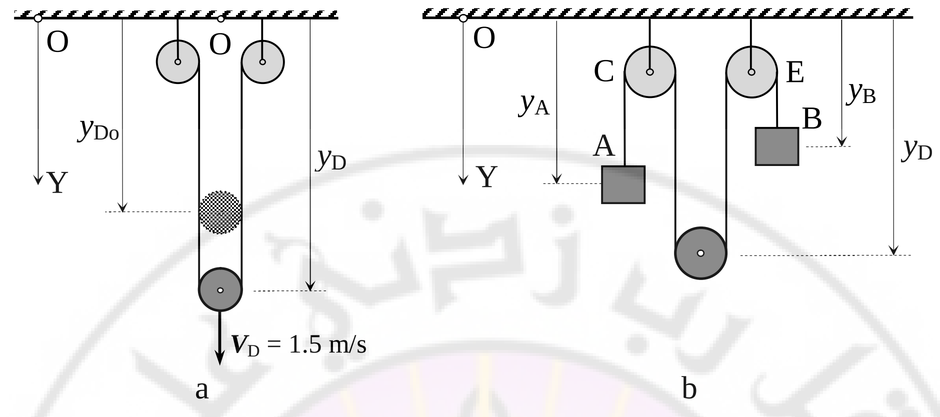
$$y_D = V_D.t + y_{D0}$$

وبالتعويض عن t بزمن الحركة الموافق وصول الكتلة A إلى L يكون:

$$y_D - y_{D0} = \Delta y_D = V_D.t = 1.5 \times 1.333$$

ومنه:

$$\Delta y_D = 2 \text{ m}$$



(الشكل-2-21)

حركة الكتلة B الموضحة في (الشكل2-21b):

نلاحظ أن طول الحبل يختلف عن المقدار $(y_A + 2y_D + y_B)$ بمقدار ثابت، وبما أن طول الحبل يظل ثابتاً في أثناء الحركة، فإن المقدار السابق يظل ثابتا أيضاً، واعتبار الزمنين $(t = 0)$ و $(t = 1.333 \ \text{sec})$ يكون:

$$y_A + 2y_D + y_B = y_{A0} + 2y_{D0} + y_{B0}$$

$$(y_A - y_{A0}) + 2(y_D - y_{D0}) + (y_B - y_{B0}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta y_A + 2\Delta y_D + \Delta y_B = 0$$

ولكننا نعلم أن:

$$\Delta y_D = 2 \text{ m} \qquad , \qquad \Delta y_A = 4 \text{ m}$$

ومنه بالتعويض نحصل على:

$$\Delta y_B = -8 \text{ m}$$

أي أن التغير في ارتفاع الكتلة B هو 8 m إلى أعلى.

باشتقاق علاقة الانتقال، نحصل على علاقة بين سرعة كل من A و B و D .

$$V_A + 2V_D + V_B = 0$$

وبالتعويض عن قيم سرعة كل من A و B عند الزمن $(t = 1.333 \ \text{sec})$ نحصل على:

$$6 + 2\times1.5 + V_B = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = -9 \text{ m/sec} \quad \uparrow$$

باشتقاق علاقة السرعة، نحصل على علاقة بين تسارع كل من A و B و D .

$$A_A + 2A_D + A_B = 0$$

وبالتعويض عن قيم تسارع كل من A و B عند الزمن $(t = 1.333 \ \text{sec})$ نحصل على:

$$4.5 + 0 + A_B = 0 \quad \Rightarrow \quad A_B = -4.5 \text{ m/sec}^2 \quad \uparrow$$

3- الحركة ذات التسارع الثابت

Constant Acceleration Motion of Particle

3-1-.معادلة الحركة ذات التسارع الثابت

تتصف هذه الحركة بتسارع ثابت $\boldsymbol{A}$ ، وفي هذه الحركة لدينا:

$$\boldsymbol{A} = \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{M}}{dt^2} \qquad (29\text{-}2)$$

حيث $\boldsymbol{A}$ متجه ثابت، وبفصل المتغيرات وإجراء التكامل بدلالة الزمن نحصل على:

$$\boldsymbol{V} = \frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = \boldsymbol{A}.t + \boldsymbol{V_0} \qquad (30\text{-}2)$$

فإذا كان $\boldsymbol{V_0}$ لا توازي $\boldsymbol{A}$ بالتالي لا تحافظ السرعة $\boldsymbol{V}$ على منحى ثابت، ويتحرك الجسيم على منحني حركة مستوية متغيرة بانتظام تدعى بحركة القذائف (*Motion of Projectile*).

نكامل (30-2) بدلالة الزمن t نحصل على:

$$\mathbf{M} - \mathbf{M_0} = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}.t^2 + \boldsymbol{V_0}.t \qquad (31\text{-}2)$$

وتعين العلاقة (31-2) الأوضاع المختلفة للجسيم M على المسار المار من الوضع الابتدائي M_0 ، أي أنها تعين وضع الجسيم بدلالة الزمن، وتمثل معادلة الحركة ذات التسارع الثابت

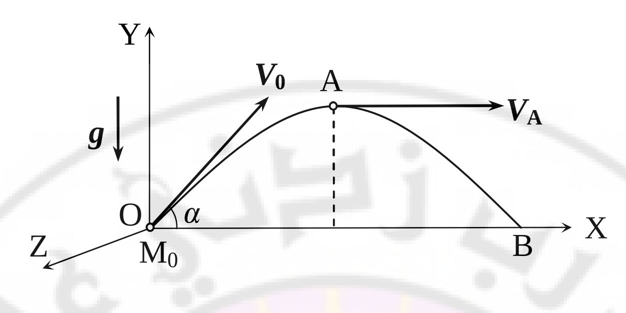
تطبيق:

يقذف جسيم مادي M في الفراغ من الوضع M_0 ، بسرعة ابتدائية V_0 تميل على الأفق بزاوية α ، بحيث لا توازي التسارع الثابت ($\boldsymbol{A} = \boldsymbol{g} \downarrow$)، تسارع الجاذبية.

لدراسة الحركة نعد جملة إحداثية (T(OXYZ تنطبق بدايتها O على الوضع الابتدائي M_0 للمتحرك، حيث المحور OY يوازي التسارع الثابت $\boldsymbol{g}$ ويعاكسه في الجهة، والمستوي OXY يوازي مستوي المتجهين $\boldsymbol{V_0}$ و $\boldsymbol{g}$ حيث يقعان ضمن محوريه OX و OY كما في (الشكل-2-22).

نبدل $\boldsymbol{A}$ بـــ $\boldsymbol{g}$ في العلاقة (29-2) و $\mathbf{M_0}$ بـــ $\mathbf{O}$ نحصل على العلاقة الشعاعية لمعادلة الحركة:

$$\mathbf{M} - \mathbf{O} = \frac{1}{2}\boldsymbol{g}.t^2 + \boldsymbol{V_0}.t \qquad (32\text{-}2)$$



(الشكل-2-22)

نسقط العلاقة (2-32) على محاور الجملة M_0XYZ نحصل على:

$$z=0 \quad , \quad x=(V_0.\cos\alpha)t \quad , \quad y=-\frac{1}{2}g.t^2+(V_0.\sin\alpha)t \qquad (33\text{-}2)$$

معادلات حركة الجسيم الذي يتحرك في المستوي M_0XY ، ونلاحظ منها أن حركة مسقط الجسيم على المحور الأفقي OX هي حركة مستقيمة منتظمة، بينما حركة مسقطه على المحور الشاقولي OY هي حركة مستقيمة متغيرة بانتظام.

ويرسم الجسيم مساراً منحنياً يقع في المستوي OXY ، ويبدأ من M_0 مبدأ الإحداثيات، ويمكن إيجاد معادلته بحذف الزمن t بين معادلتي حركة الجسيم x و y حيث:

$$t=\frac{x}{V_0.\cos\alpha} \qquad (34\text{-}2)$$

ومنه:

$$y=-\frac{g}{2(V_0.\cos\alpha)^2}x^2+\tan\alpha.x \qquad (35\text{-}2)$$

وهي معادلة قطع مكافىء محوره يوازي OY .

باشتقاق معادلات حركة الجسيم نحصل على مركبتي السرعة V في الموضع $M(x,y)$ من المسار على محوري الجملة OXY هما:

$$\dot{x}=V_0.\cos\alpha \quad , \quad \dot{y}=-g.t+V_0.\sin\alpha \qquad (36\text{-}2)$$

نلاحظ أن مسقط السرعة $\boldsymbol{V}$ على المحور OX ثابت لا علاقة له بالزمن، في حين يتحول مسقطه على المحور OY مع الزمن.

أما القيمة العددية للسرعة:

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = g^2.t^2 + V_0^2 - 2g.V_0.\sin a.t$$

$$V^2 - V_0^2 = -2g(-\frac{1}{2}g.t^2 + V_0.\sin a.t)$$

$$V^2 - V_0^2 = -2g.y \qquad (37\text{-}2)$$

حيث يكتسب المتحرك سرعات متساوية في الأوضاع المتساوية الارتفاع عن المحور OX .

حين بلوغ المتحرك قمة المسار A ، تكون السرعة $\boldsymbol{V}_{\mathbf{A}}$ موازية للمحور OX أي أفقية، أي:

$$V_A = \dot{x}_A = V_0.\cos a$$

و:

$$\dot{y}_A = -g.t_A + V_0.\sin a = 0$$

منه زمن الوصول إلى قمة المسار A :

$$t_A = \frac{V_0.\sin a}{g} \qquad (38\text{-}2)$$

بالتعويض في معادلات الحركة (2-33) نحصل على إحداثيات القمة A :

$$x_A = \frac{V_0^2.\sin 2a}{2g} \quad , \quad y_A = \frac{V_0^2.\sin^2 a}{2g} \qquad (39\text{-}2)$$

وبعد وصول الجسيم إلى القمة A يعود بها المسار إلى المحور OX الذي يقطعه في النقطة B ، وتسمى بمدى المسار نحصل عليه من معادلة المسار (2-35) بوضع ($y_B = 0$):

$$\mathrm{OB} = x_B = \frac{V_0^2.\sin 2a}{g} \qquad (40\text{-}2)$$

كما يمكن الحصول على المدى من معادلة الحركة (2-33) على المحور OY بوضع ($y_B = 0$):

$$y_B = -\frac{1}{2}g.t_B^2 + V_0.\sin a.t_B = 0$$

حيث نحصل على زمن الوصول إلى مدى المسار B :

$$t_B = \frac{2V_0.\sin a}{g} \qquad (41\text{-}2)$$

ومن ثم التعويض في معادلة الحركة على المحور OX نحصل على المدى.

نلاحظ أن المدى ($\mathrm{OB} = x_B = 2\, x_A$)، ويصل الجسيم M إلى المدى B في اللحظة ($t_B = 2\, t_A$).

ملاحظة:

- يتضح من المعادلة (2-40) أن الجسيم المادي المقذوف في اتجاه يميل على الأفق بزاوية ($\beta = 90^o - \alpha$) لها نفس المدى لأن ($\sin 2\beta = \sin 2\alpha$)، وبالتالي يمكن لمسارين أن يصلا إلى المدى B نفسه بالسرعة الابتدائية V_0 نفسها، حيث يكون:
المسار الأول لأجل ($\alpha < 45^o$)، والمسار الثاني لأجل ($\beta = 90^o - \alpha > 45^o$).
- يتضح أيضاً من المعادلة (2-39) أن للسرعة الابتدائية المعطاة V_0 يصل المدى الأفقي إلى قيمته العظمى عندما ($\sin 2\alpha = 1$) أي عندما ($\alpha = 45^o$).

مسألة -2-17

أطلقت قذيفة من مركز يقع على ارتفاع ($l = 150$ m) عن سطح الأرض بسرعة ابتدائية (V_0 =180 m/sec) تميل بزاوية ($\alpha = 30^o$) على الأفق كما في (الشكل-2-23a).

بحساب أن التسارع الأرضي ($g = 9.81$ m/sec^2)، وبإهمال مقاومة الهواء، المطلوب إيجاد:

1. المسافة التي تقطعها القذيفة من مركز القذف حتى مكان اصطدامها مع الأرض.
2. سرعة اصطدام القذيفة بالأرض.
3. أعلى ارتفاع تصله القذيفة من الأرض.
4. علاقة نصف قطر المنحني في نقطة من المسار، وحساب نصف قطر التقوس في ذروة المسار.

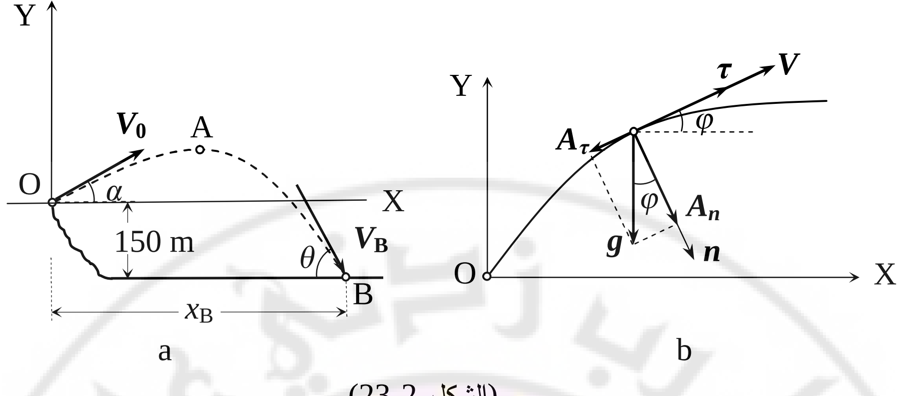
الحل:

تتحرك القذيفة بتسارع ثابت وفق العلاقة الشعاعية لمعادلة الحركة:

$$\mathbf{M} - \mathbf{O} = \frac{1}{2}\boldsymbol{g}.t^2 + \boldsymbol{V_0}.t$$

نسقط العلاقة على محاور الجملة OXY نحصل على معادلات حركة القذيفة:

$$x = V_0.\cos a.t \quad , \quad y = -\frac{1}{2}g.t^2 + V_0.\sin a.t$$



(الشكل-2-23)

1. يمكن الحصول على المسافة التي تقطعها القذيفة والتي تمثل المدى B من معادلة الحركة على المحور OY بوضع (y_B = -150 m):

$$-150 = -4.9\, t_B^2 + 90\, t \qquad \Rightarrow \qquad t_B^2 - 18.37\, t_B - 30.6 = 0$$

نحصل على زمن القذف أي زمن الوصول إلى مدى المسار B :

$$t_B = 19.91\,\text{sec}$$

بالتعويض في معادلة الحركة على المحور OX نحصل المسافة المقطوعة أي على المدى.

$$x_B = 90\sqrt{3} \times 19.91 = 3100\ \text{m}$$

2. تحسب سرعة اصطدام القذيفة بالأرض، أي سرعة القذيفة في المدى، من كون حركة مسقط القذيفة على المحور الشاقولي OY حركة متغيرة بانتظام، بالتالي يمكن حساب السرعة من العلاقة:

$$V_B^2 - V_0^2 = -2g(y_B - y_0) \qquad \Rightarrow \qquad V_B^2 = V_0^2 - 2g(-l - 0)$$

بالتعويض:

$$V_B^2 = V_0^2 + 2g.l = (180)^2 + 2 \times 9.81 \times 150 = 35343\ \text{m}^2/\text{sec}^2$$

منه:

$$V_B = 188\ \text{m/sec}$$

ويميل على الأفق بزاوية θ ، كما في (الشكل-2-23a)، بالتالي يكون:

$$V_{BX} = V_B.\cos q$$

لكن:

$$V_{BX} = V_0.\cos a$$

منه:

$$\cos q = V_0 \cos a \,/\, V_B = 180 \times 0.866 / 188 = 0.829 \qquad \Rightarrow \qquad q = 34^o$$

3. إن أعلى ارتفاع تصله القذيفة يعطى بــ:

$$y_{\max} = l + y_{\mathrm{A}}$$

حيث y_{A} تمثل ارتفاع قمة المسار A عن مبدأ القذف وتحسب من كون سرعة القذيفة في القمة $\boldsymbol{V}_{\mathrm{A}}$ موازية للمحور OX أي أفقية، بالتالي:

$$V_{\mathrm{A}} = \dot{y}_{\mathrm{A}} = 0$$

منه باشتقاق معادلة حركة القذيفة على المحور OY ، والتعويض نحصل على زمن الوصول إلى قمة المسار A:

$$\dot{y}_{\mathrm{A}} = -g.t_{\mathrm{A}} + V_0.\sin\alpha = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_{\mathrm{A}} = V_0.\sin\alpha / g$$

بالتعويض في معادلة حركة القذيفة على المحور OY نحصل على ارتفاع قمة المسار A عن مبدأ القذف:

$$y_{\mathrm{A}} = \frac{V_0^2.\sin^2\alpha}{2g} = \frac{(180)^2}{2\times 9.81\times 4} = 413\,\mathrm{m}$$

ومنه:

$$y_{\max} = 150 + 413 = 563\,\mathrm{m}$$

4. لتعيين مركز تقوس المسار المنحني في أعلى نقطة منه، نعين أولاً نصف قطر تقوس المنحني الذي ترسمه القذيفة في لحظة ما بعد الانطلاق، لذا نحلل التسارع $\boldsymbol{g}$ الذي يتجه شاقولياً نحو الأسفل إلى مركبتين، الناظمية باتجاه $\boldsymbol{n}$ والمماسية باتجاه $\boldsymbol{\tau}$ كما في (الشكل-2-22b)، حيث:

$$A = A_n + A_t = g$$

وبما أن φ الزاوية بين الناظم الرئيسي $\boldsymbol{n}$ والتسارع الكلي $\boldsymbol{g}$ نجد أن:

$$A_t = -g.\sin\varphi \qquad , \qquad A_n = g.\cos\varphi$$

بما أن التسارع الناظمي يعطى بالعلاقة:

$$A_n = V^2 / r$$

ومنه نصف قطر التقوس:

$$r = V^2 / A_n = V^2 / g.\cos\varphi$$

لحساب V لدينا من (الشكل-2-22b):

$$V_x = V.\cos\varphi$$

غير أن:

$$V_x = \dot{x} = V_0.\cos\alpha$$

ومنه:

$$V = V_0.\cos\alpha \,/\, \cos\varphi$$

بالتعويض في علاقة نصف قطر التقوس نحصل على:

$$r = V_0^2.\cos^2\alpha \,/\, g.\cos^3\varphi$$

ففي ذروة المسار A يكون ($\varphi = 0$) ومنه:

$$r_{\mathrm{A}} = (V_0^2.\cos^2\alpha)/g$$

بالتعويض:

$$r_{\mathrm{A}} = 2477 \text{ m}$$

مسألة -2-18

تقذف كرة بسرعة ابتدائية V_0 مركبتها الأفقية ($V_{0X} = 12$ m/sec)، من موقع O يرتفع عن المستوى الأفقي بمقدار ($h = 1.5$ m)، وتبعد مسافة ($l = 6$ m) عن حائط شاقولي ارتفاعه ($H = 5$ m)، وتمر الكرة المقذوفة بملامسة أعلى نقطة من الحائط كما هو مبين في (الشكل-2-24).

المطلوب حساب لحظة اصطدام الكرة بالأرض الأفقية، وما سرعتها عندئذ.

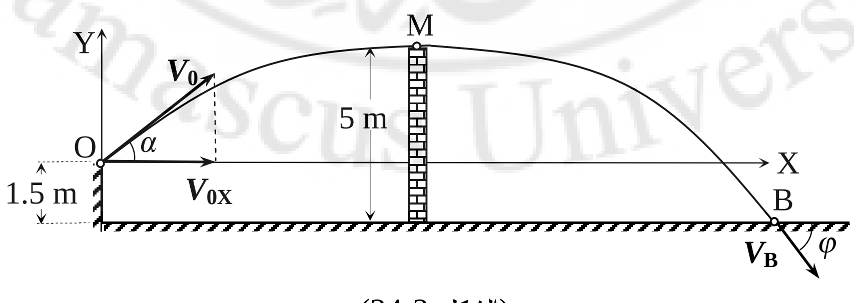
الحل:

تتحرك الكرة بتسارع ثابت وفق العلاقة الشعاعية لمعادلة الحركة:

$$\mathbf{OM} = \frac{1}{2}\boldsymbol{g}.t^2 + \boldsymbol{V_0}.t$$

نسقط العلاقة على محاور الجملة OXY نحصل على معادلات حركة الكرة:

$$x = V_0.\cos\alpha.t \quad , \quad y = -\frac{1}{2}g.t^2 + V_0.\sin\alpha.t$$



(الشكل-2-24)

وتحسب لحظة اصطدام الكرة بالأرض الأفقية t_B ، أي لحظة الوصول إلى المدى من العلاقة:

$$y_B = -\frac{1}{2} g.t_B^2 + V_0.\sin a.t_B$$

حيث (y_B = - 1.5 m)، ولحساب V_0 ندرس حركة الكرة لحظة تماسها الجدار الشاقولي حيث إحداثيات الموقع M التي تمر الكرة المقذوفة بملامستها هي:

$$y_M = 5 - 1.5 = 3.5 \text{ m} \qquad , \qquad x_M = 6 \text{ m}$$

ومن جهة ثانية لدينا:

$$x_M = V_0.\cos a.t_M = V_{0X}.t_M \quad \Rightarrow \quad 6 = 12\, t_M$$

ومنه زمن وصول الكرة لأعلى موقع من الجدار:

$$t_M = 0.5 \sec$$

كذلك لدينا:

$$y_M = -\frac{1}{2} g.t_M^2 + V_0.\sin a.t_M$$

بالتعويض:

$$3.5 = -0.5 \times 9.81 \times 0.25 + (V_0.\sin a)\, 0.5$$

ومنه:

$$V_0.\sin a = V_{0Y} = 9.45 \text{ m/sec}$$

ولكن:

$$V_0 = (V_{0X}^2 + V_{0Y}^2)^{1/2}$$

بالتعويض:

$$V_0 = [(12)^2 + (9.45)^2]^{1/2} = 15.27 \text{ m/sec}$$

بالتعويض في علاقة y_B نحصل على:

$$4.905\, t_B^2 - 9.45\, t_B - 1.5 = 0$$

ومنه زمن الوصول إلى المدى B :

$$t_B = 2.08 \sec$$

وتحسب سرعة الكرة عند اصطدامها بالأرض بعد تعيين مركبتيها V_{BX} و V_{BY} :

$$V_{BX} = \dot{x}_B = V_0.\cos a = 12 \text{ m/sec}$$

$$V_{BY} = \dot{y}_B = -g.t_B + V_0.\cos a = -9.81 \times 2.08 + 9.45 = -10.93 \text{ m/sec}$$

$$V_B = (V_{BX}^2 + V_{BY}^2)^{1/2} = (144 + 119.46)^{1/2} = 16.23 \text{ m/sec}$$

وتصنع مع الأفق زاوية φ حيث:

$$\tan j = V_{BY} / V_{BX} = -10.93/12 = -0.91 \quad \Rightarrow \quad j = -42.32^{o}$$

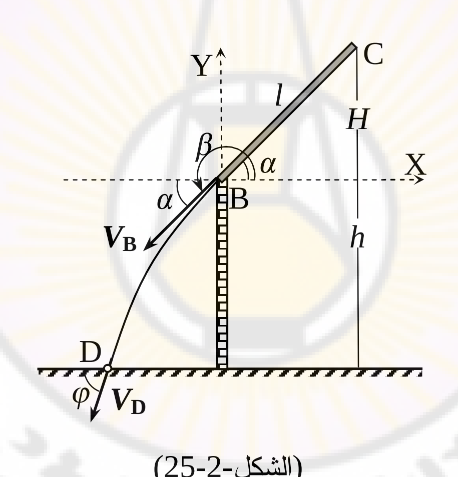
مسألة -2-19

حائط شاقولي AB ارتفاعه (h = 40 m) يتصل بأعلاه B بمستوي مائل صقيل BC طوله (l = 50 m)، وميله على الأفق ($\alpha = 45^{o}$).

يبدأ جسيم بالحركة على المستوي المائل من C دون سرعة ابتدائية، والمطلوب:

1. تعيين نقطة اصطدام الجسيم بالأرض الأفقية.
2. تعيين متجه السرعة عند اصطدام الجسيم بالأرض.

الحل:



(الشكل-2-25)

يكتسب الجسم الساقط M على المستوي المائل عند وصوله إلى B سرعة $\boldsymbol{V}_{B}$ تتجه على المستوي المائل ونحو الأسفل وتميل على الأفق BX بزاوية ($\beta = \pi + \alpha$) كما في (الشكل-2-25).

وتعين السرعة $\boldsymbol{V_B}$ من حركة الجسيم المستقيمة على المستوي المائل الصقيل BC ، وذلك بتطبيق علاقة السرعة بدلالة المسافة بين الموضعين C و B :

$$V_{B}^{2} - V_{C}^{2} = 2A.\,BC \qquad \Rightarrow \qquad V_{B}^{2} = 2g.\sin a.BC = 2g.H_{BC}$$

منه:

$$V_{B} = (2g.H_{BC})^{1/2} = (2\times 9.81\times 50\times 0.7071)^{1/2} = 26.34\ \text{m/sec}$$

وعندما ينطلق الجسيم M من B يتحرك بتسارع ثابت وفق معادلة الحركة:

$$\mathbf{OM} = \frac{1}{2}\boldsymbol{g}.t^2 + \mathbf{V_B}.t$$

ويرسم خلالها قطعاً مكافئاً، وبإسقاط العلاقة على محاور الجملة BXY الموضحة في (الشكل-2-24) نحصل على معادلات حركة الجسيم:

$$x = -V_B.\cos\alpha.t \quad , \quad y = -\frac{1}{2}g.t^2 - V_B.\sin\alpha.t$$

وإحداثياته تعطى بـــ:

$$x = -V_B.\cos\alpha.t = -(26.34\times\sqrt{2}/2)\,t = -13.17\sqrt{2}\,t \qquad (1)$$

$$y = -\frac{1}{2}g.t^2 - V_B.\sin\alpha.t = -13.17\sqrt{2}\,t - 4.905\,t^2 \qquad (2)$$

1. يصطدم الجسيم في الأفق في الموقع D التي إحداثياتها:

$$y_D = -40\text{ m}$$

بالتعويض في (2) نحصل على:

$$4.905\,t_D^2 + 13.17\sqrt{2}\,t_D - 40 = 0$$

ومنه:

$$t_D = 1.53\text{ sec}$$

بالتعويض في (1) نحصل على موضع اصطدام الجسيم بالأرض الأفقية، وهي:

$$x_D = -28.5\text{ m}$$

2. لتعيين متجه سرعة الجسيم في D ، نحسب مركبتيها:

$$V_{DX} = \dot{x}_D = -V_B.\cos\alpha = -26.34\sqrt{2}/2 = -18.62\text{ m/sec}$$

$$V_{DY} = \dot{y}_D = -g.t_D - V_B.\sin\alpha = -9.81\times1.53 - 26.34\sqrt{2}/2 = -33.6\text{ m/sec}$$

فيكون:

$$V_D = (V_{DX}^2 + V_{DY}^2)^{1/2} = (346.89 + 1128.96)^{1/2} = 38.41\text{ m/sec}$$

ويصنع مع الأفق زاوية φ تعطى بـــ:

$$\tan\varphi = V_{DY}/V_{DX} = (-33.6)/(-18.62) = 1.8 \quad\Rightarrow\quad \varphi = 61^\circ$$

4-1- معادلة الحركة الدائرية لجسيم

الحركة الدائرية لجسيم مادي M هي حركة منحنية يكون فيها نصف قطر الانحناء ثابتاً، وبالتالي يكون مسار الجسيم المتحرك دائرة نصف قطرها R كما في (الشكل-2-26).

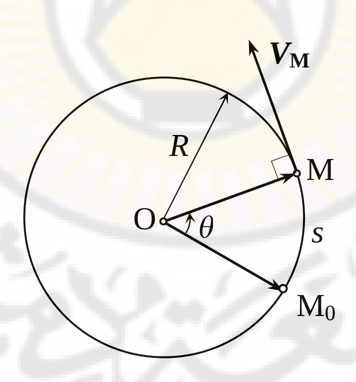
يتحدد وضع الجسيم M بالطريقة الطبيعية بأن نوجه المسار في الجهة المباشرة أي عكس حركة عقارب الساعة، ونعد M_0 على الدائرة التي تمثل وضع المتحرك في اللحظة t_0 مبدأ الفواصل للقوس الموجه، فيكون:

$$\overset{\frown}{M_0M} = s = R.q \qquad (42\text{-}2)$$

تدعى θ بزاوية دوران المتجه **OM** (*Angle of Rotation*)، وتقاس بالزوايا نصف قطرية (*Radians*)، وهي متحولة مع الزمن بالتالي تكون معادلة الحركة الدائرية من الشكل:

$$q = f(t) \qquad (43\text{-}2)$$

وتؤخذ θ مع إشارتها التي تعد موجبة إذا تم الدوران في الجهة المباشرة وسالبة إذا تم الدوران في الجهة العكسية.



(الشكل-2-26)

ويمكن تحديد وضع الجسيم M بطريقة الإحداثيات بدلالة ثلاثية T(OXYZ) تمر من مركز الانحناء المنطبق على مركز الدوران O ، حيث:

$$x = R.\cos q \quad , \quad y = R.\sin q \quad , \quad z = 0 \qquad (44\text{-}2)$$

كما يمكن تحديد وضع الجسيم M بالمتجه الموضعي للمتحرك:

$$\mathbf{OM} = \boldsymbol{r} = R.\cos q.\boldsymbol{i} + R.\sin q.\boldsymbol{j} \qquad (45\text{-}2)$$

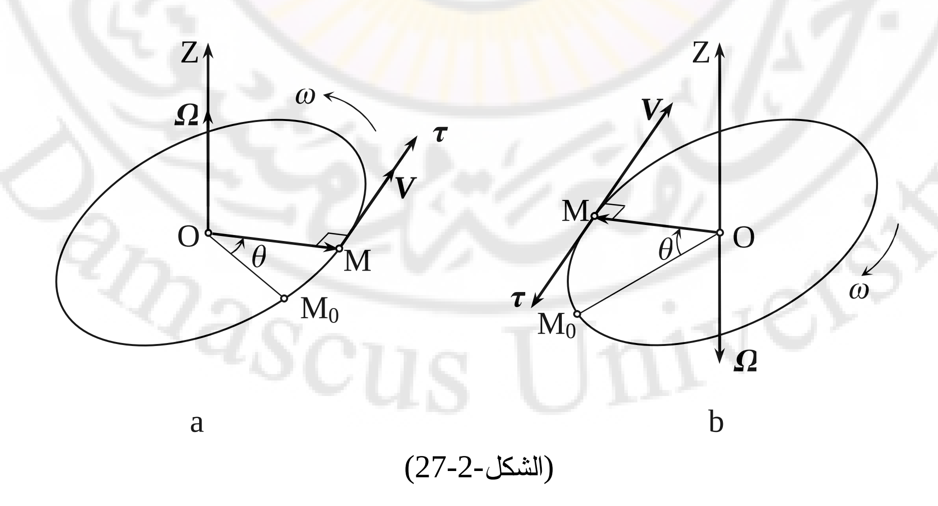
2-4- السرعة الخطية *Linear Velocity*

باشتقاق المعادلة (2-42) بالنسبة للزمن نحصل على السرعة الخطية للجسيم المتحرك بالطريقة الطبيعية:

$$V = \dot{s} = R.\dot{\theta} = R.\omega \qquad (2\text{-}46)$$

حيث V تمثل القيمة العددية لمتجه السرعة الخطية $\boldsymbol{V}$ للجسيم، الذي يمس المسار في النقطة M ، والمشتق الأول لزاوية الدوران بالنسبة للزمن $(\dot{\theta} = \omega)$ تدعى بالسرعة الزاوية (*Angular Velocity*) للمتحرك M ، وتعرّف بالزاوية المقطوعة التي يدورها نصف القطر R في وحدة الزمن، وتقاس بـــ $(rad/sec \equiv 1/sec \equiv sec^{-1})$ وتمثل القيمة العددية لمتجه السرعة الزاوية للدوران $\boldsymbol{\Omega}$ لنصف القطر المتجه $\mathbf{OM}$ ، والذي ينطبق على محور الدوران OZ العمودي على مستوى الدائرة، ويتجه $\boldsymbol{\Omega}$ بشكل تدور حوله M في الجهة المباشرة، أي وفق حركة اليد اليمنى، نميز حالتين:

- إذا سارت M على الدائرة في الجهة المباشرة، بجهة الأقواس المتزايدة، أي عكس اتجاه حركة عقارب الساعة، ازدادت عندها θ مع الزمن، وكان المشتق $(\dot{\theta} = \omega)$ موجباً، ويتجه متجه الدوران $\boldsymbol{\Omega}$ في الجهة الموجبة لمحور الدوران OZ ، ولما كان $(\dot{\theta} = \omega)$ موجبة كانت القيمة العددية V موجبة أيضاً، ويتجه $\boldsymbol{V}$ في الجهة الموجبة للمماس $\boldsymbol{\tau}$ الذي يتجه دوماً نحو الأقواس المتزايدة (الشكل-2-27a).

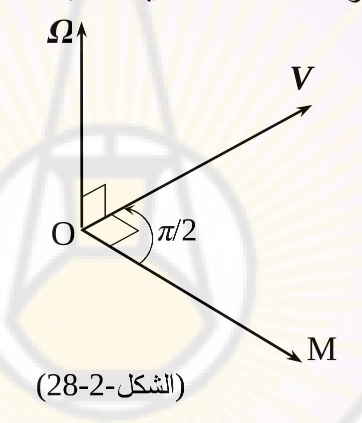


(الشكل-2-27)

- وإذا سارت M على الدائرة في جهة الأقواس المتناقصة أي جهة حركة عقارب الساعة، تناقصت عندها θ مع الزمن، وكان المشتق $(\dot{\theta}=\omega)$ سالباً، ويتجه متجه الدوران $\boldsymbol{\Omega}$ في الجهة السالبة لمحور الدوران OZ ، ولما كان $(\dot{\theta}=\omega)$ سالبة كانت القيمة العددية V سالبة، واتجه عندها $\boldsymbol{V}$ في الجهة السالبة للمماس $\boldsymbol{\tau}$ حيث يدور حول $\boldsymbol{\Omega}$ في الجهة المباشرة (الشكل-2-27b).

نستنتج في الحالتين أن متجه السرعة الخطية يدور دوماً حول $\boldsymbol{\Omega}$ في الجهة المباشرة.

لإيجاد علاقة السرعة الخطية للجسيم المتحرك بالطريقة الطبيعية، نرسم من النقطة O ثلاثية تساير على الترتيب المتجهات $\mathbf{OM}\ ,\ \boldsymbol{V}\ ,\ \boldsymbol{\Omega}$ كما في (الشكل-2-28) نحصل على ثلاثية قائمة مباشرة $\mathbf{OM}\ \boldsymbol{V}\ \boldsymbol{\Omega}$ ، حيث المتجه $\boldsymbol{V}$ يعامد $\boldsymbol{\Omega}$ ويعامد $\mathbf{OM}$.



(الشكل-2-28)

لذا كان بالإمكان كتابة علاقة السرعة بالشكل:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM} \qquad (47\text{-}2)$$

التي تمثل علاقة متجه السرعة والتي تكتب بالشكل:

$$\boldsymbol{V} = \mathbf{MO} \wedge \boldsymbol{\Omega} \qquad (48\text{-}2)$$

تبين العلاقة الأخيرة أن متجه السرعة $\boldsymbol{V}$ هو عزم متجه الدوران $\boldsymbol{\Omega}$ في النقطة M .

وإذا علمنا وضع الجسيم M بدلالة ثلاثية T(OXYZ) تمر من مركز الدوران O وفق العلاقة (2-45)، وعلمنا السرعة الزاوية $(\dot{\theta}=\omega)$ أمكن تحديد سرعة الجسيم M بطريقة الإحداثيات:

$$\boldsymbol{V} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ R.\cos\theta & R.\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = -\omega.R.\sin\theta.\boldsymbol{i} + \omega.R.\cos\theta.\boldsymbol{j} \qquad (49\text{-}2)$$

أو إذا علمنا وضع الجسيم M بدلالة المتجه الموضعي وفق العلاقة (2-45) للمتحرك أمكن تحديد سرعة الجسيم M بطريقة المتجهات.

$$\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{dM}}{dt} = -w.R.\sin q.\boldsymbol{i} + w.R.\cos q.\boldsymbol{j} \qquad (50\text{-}2)$$

والتي تكتب بالشكل:

$$\boldsymbol{V} = V_{\mathrm{X}}.\boldsymbol{i} + V_{\mathrm{Y}}.\boldsymbol{j} = \boldsymbol{V_{\mathrm{X}}} + \boldsymbol{V_{\mathrm{Y}}} \qquad (51\text{-}2)$$

نستنتج أن متجه السرعة الخطية يوازي المستوي OXY ويتجه باتجاه الحركة على امتداد مسار الدائرة التي يرسمها خلال الحركة وقيمته العددية:

$$V = (w^2.R^2.\sin^2 q + w^2.R^2.\cos^2 q)^{1/2} = R.w \qquad (52\text{-}2)$$

3-4- التسارع الخطي *Linear Acceleration*

إن تسارع جسيم متحرك M بالنسبة لمسار منحنٍ يعطى بالطريقة الطبيعية بالعلاقة:

$$\boldsymbol{A} = \dot{V}.\boldsymbol{\tau} + \frac{V^2}{r}\boldsymbol{n}$$

ولما كان المسار دائرة يكون:

$$r = R = \text{const} \quad , \quad V = R.\omega \quad \Rightarrow \quad \dot{V} = R.\dot{\omega}$$

يرمز عادة لـــ $\dot{w}$ بـــ ε ويدعى بالتسارع الزاوي، الذي يساوي عدديا المشتق الأول من السرعة الزاوية، أو المشتق الثاني من زاوية الدوران بالنسبة للزمن، أي أنه يحدد تحولات السرعة الزاوية بدلالة الزمن، ويقاس بـــ $(rad/\sec^2 \equiv 1/\sec^2 \equiv \sec^{-2})$، ويمثل القيمة العددية لمتجه التسارع الزاوي $\boldsymbol{E}$ الذي ينطبق على محور الدوران OZ ، ويحدد اتجاهه بنفس طريقة تحديد اتجاه متجه السرعة الزاوية $\boldsymbol{\Omega}$.

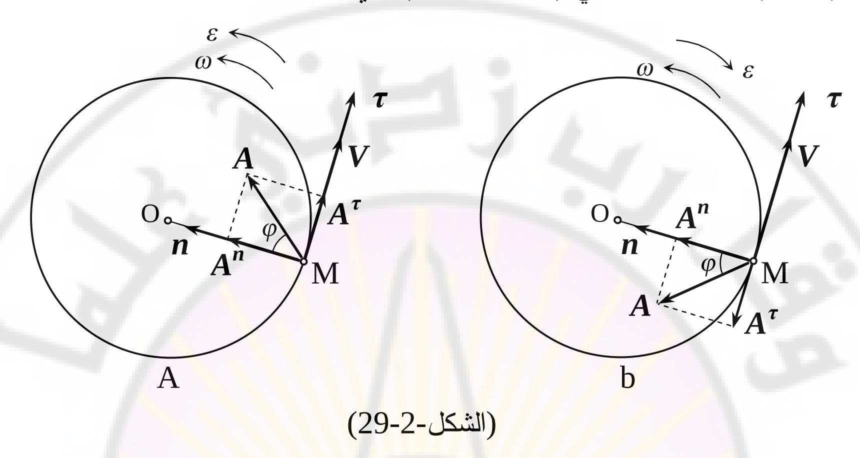
بالتعويض ينتج التسارع الكلي:

$$\boldsymbol{A} = R.e.\boldsymbol{\tau} + R.w^2.\boldsymbol{n} \qquad (53\text{-}2)$$

الذي يتحدد بمركبتين:

مركبة التسارع الناظمي $(\boldsymbol{A^n} = R.w^2.\boldsymbol{n})$ التي تتجه نحو مركز الدائرة دوماً لأن $(R.w^2 > 0)$ دوماً.

مركبة التسارع المماسي $(\boldsymbol{A}^{\tau} = R.e.\boldsymbol{\tau})$ التي تتجه على امتداد المماس في الاتجاه الموجب إذا كان $(e > 0)$ كما هو مبين في (الشكل-2-29a)، والعكس صحيح في الاتجاه السالب إذا كان $(e < 0)$ كما هو مبين في (الشكل-2-29b)، أي تتجه باتجاه ε دوماً.



(الشكل-2-29)

والقيمة العددية للتسارع الخطي الكلي هو:

$$A = (A_t^2 + A_n^2)^{1/2} = (R^2.e^2 + R^2.w^4)^{1/2} = R(e^2 + w^4)^{1/2} \qquad (54\text{-}2)$$

ويميل متجه التسارع الخطي الكلي عن نصف قطر دائرة المسار بالزاوية φ التي تعين بـــ :

$$\tan j = \frac{A^t}{A^n} = \frac{|e|}{w^2} \qquad (55\text{-}2)$$

وتؤخذ ε بقيمتها المطلقة للحصول على زاوية φ حادة، وتعين نوعية الحركة بملاحظة أنه إذا ازدادت القيمة المطلقة للسرعة الزاوية بازدياد الزمن كانت الحركة الدائرية متسارعة $(w.e > 0)$، وإذا تناقصت القيمة المطلقة للسرعة الزاوية بازدياد الزمن كانت الحركة الدائرية متباطئة $(w.e < 0)$.

4-4- الحركة الدائرية المنتظمة *Uniform Circular Motion*

إذا تحرك الجسيم M على الدائرة بسرعة زاوية ثابتة، ففي أي لحظة زمنية يكون تغير الزاوية خلال مدات زمنية متساوية هو واحد، لذا يسمى هذا النوع من الحركة بالحركة الدائرية المنتظمة، ففي هذه الحركة لدينا:

$$\frac{dq}{dt} = w = \text{const} \qquad (56\text{-}2)$$

ويكون عندها التسارع الزاوي معدوماً:

$$\ddot{q} = \dot{w} = e = 0$$

والقيمة العددية للسرعة الخطية ثابتة:

$$V = R.w = \text{const}$$

وبالتالي التسارع المماسي معدوم:

$$\boldsymbol{A}^{\tau} = R.e.\boldsymbol{\tau} = 0$$

ويصبح التسارع الخطي الكلي مساوياً للتسارع الناظمي:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{n} = R.w^{2}.\boldsymbol{n}$$

الذي يتجه نحو مركز الدائرة.

بمكاملة المعادلة (2-56) بعد معرفة الشروط الابتدائية نحصل على:

$$q = w.t + q_0 \qquad (57\text{-}2)$$

معادلة حركة الجسيم خلال حركته الدائرية المنتظمة، ومنه يمكن أن نكتب:

$$R.q = R.w.t + R.q_0$$

وبالتالي نحصل على:

$$s = R.w.t + s_0 \qquad (58\text{-}2)$$

معادلة حركة الجسيم خلال حركته على منحنٍ دائري، ويكون القوس s في هذه الحالة تابعاً خطياً للزمن t ، والحركة دورية دورها ($T = 2\pi/\omega$).

4-5- الحركة الدائرية المتغيرة بانتظام

Uniformly Variable Circular Motion

يتحرك الجسيم M على الدائرة بحركة متغيرة بانتظام، إذا كان في كل لحظة زمنية ازدياد السرعة الزاوية أو نقصانها خلال مدات زمنية متساوية واحداً، أي بتسارع زاوي ثابت ($e = \pm\text{const}$)، يدعى هذا النوع من الحركة بالحركة الدائرية المتسارعة بانتظام (*Uniformly Accelerated Circular Motion*) أو المتباطئة بانتظام (*Uniformly Decelerated Circular Motion*).

للحصول على معادلة الحركة هذه لدينا:

$$\frac{dw}{dt} = \pm e = \text{Const.} \qquad \Rightarrow \qquad dw = \pm e\,.dt \qquad (59\text{-}2)$$

بالتكامل بدلالة الزمن مع الاعتماد على الشروط الابتدائية عندما:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad w = w_0$$

نحصل على:

$$w = \pm e . t + w_0 \qquad (60\text{-}2)$$

معادلة تعين العلاقة بين السرعة الزاوية والزمن، حيث تكتب بشكل آخر:

$$\frac{dq}{dt} = \pm e . t + w_0 \quad \Rightarrow \quad dq = \pm e . t . dt + w_0 . dt$$

بالتكامل بدلالة الزمن مع الاعتماد على الشروط الابتدائية عندما:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad q_0 = 0$$

نحصل على:

$$q = \pm \frac{1}{2} e . t^2 + w_0 . t \qquad (61\text{-}2)$$

وهذه العلاقة تعبر عن معادلة الحركة الدائرية المتغيرة بانتظام.

مسألة 2-20-

يتحرك جسيم M على دائرة مركزها نقطة الأصل O ، ونصف قطرها ($R = 6$ cm) بسرعة ($V = s$ cm/sec) حيث s المسافة المقطوعة.

فإذا بدأ الجسيم حركته من السكون من الجزء الموجب للمحور OX باتجاه معاكس لحركة عقارب الساعة، المطلوب عندما يصل الجسيم إلى الجزء السالب من المحور OX ، إيجاد ما يلي:

1. السرعة الزاوية للحركة الدائرية للجسيم.
2. السرعة الخطية للجسيم.
3. التسارع الزاوي للحركة الدائرية للجسيم.
4. التسارع الخطي للجسيم.

الحل:

1. إذا كانت θ هي الزاوية المحصورة عند المركز بواسطة قوس من الدائرة الموضحة في (الشكل-2-30a)، فإن طول هذا القوس باعتبار R نصف قطر الدائرة يعطى بـــ:

$$s = R . \theta$$

والسرعة الخطية:

$$V = \dot{s} = R.\omega$$

من تساوي العلاقتين وفق نص المسألة نحصل على:

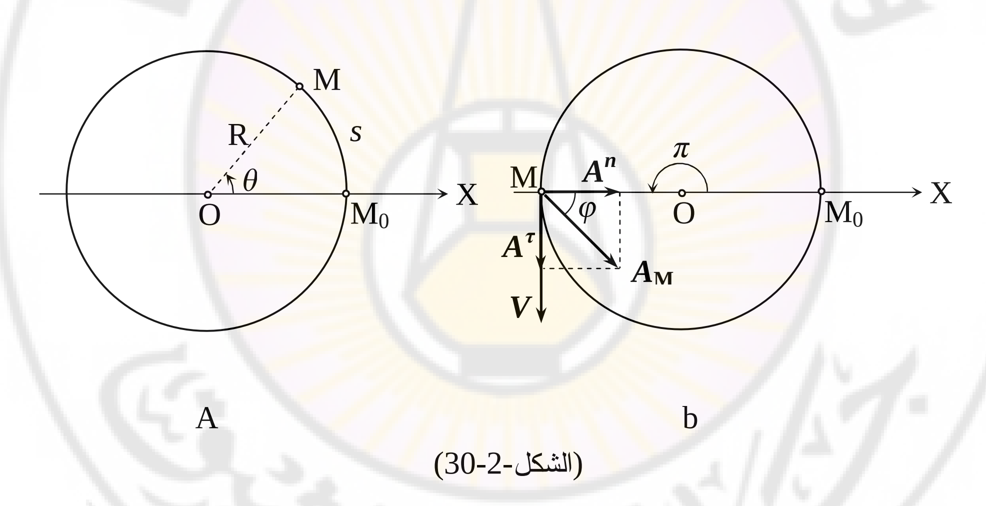
$$\omega = \theta$$

أي أن السرعة الزاوية للحركة الدائرية تساوي عددياً الزاوية التي دارها نصف القطر، وعند وصول الجسيم إلى المحور OX السالب يكون قد دار زاوية موضحة في (الشكل-2-30b)، قدرها:

$$\theta = \pi$$

منه السرعة الزاوية لدوران الجسيم:

$$\omega = \pi = 3.14\ \mathrm{rad/sec}$$



(الشكل-2-30)

2. أما السرعة الخطية للجسيم عند وصوله للمحور OX السالب فهي بالتعويض:

$$V = \dot{s} = R.\omega = 6\pi = 18.9\ \mathrm{cm/sec} \downarrow$$

3. أما التسارع الزاوي للحركة الدائرية فيعطى بالعلاقة:

$$\varepsilon = \dot{\omega}$$

وبما أن:

$$\omega = \theta$$

منه:

$$\varepsilon = \dot{\theta} = \omega = \pi = 3.14\ \mathrm{rad/sec^2}$$

4. إن التسارع الخطي للجسيم مؤلف من مركبتين:

المركبة الناظمية:

$$A^n = R.w^2 = 59.3 \text{ cm/sec}^2 \rightarrow$$

المركبة المماسية:

$$A^t = R.e = 18.9 \text{ cm/sec}^2 \downarrow$$

ومنه التسارع الكلي:

$$A = (A_t^2 + A_n^2)^{1/2} = R(e^2 + w^4)^{1/2} = 62.08 \text{ cm/sec}^2$$

وميل متجه التسارع على الناظم OX يحدد بالعلاقة:

$$\tan j = \frac{A^t}{A^n} = \frac{|e|}{w^2} = \frac{3.14}{(3.14)^2} = 0.318 \qquad \Rightarrow \qquad j = 17.6^o$$

مسألة -2-21

يبدأ جسيمان B و C حركتهما من السكون على دائرة نصف قطرها (R = 10 cm) باتجاه عكس حركة عقارب الساعة، عند الابتداء كان الجسيم C على الجزء الموجب للمحور OX ، بينما كان الجسيم B على الجزء الموجب للمحور OY كما هو مبين في (الشكل-2-31a).

فإذا كانت السرعة الزاوية لدوران الجسيم C تساوي [$\omega_C = \pi/2$]، ولدوران الجسيم B تساوي [ω_B=(3π/4) t]، المطلوب بعد ثانيتين من الابتداء، إيجاد ما يلي:

1. وضع الجسيمين.
2. السرعة الخطية والتسارع الخطي للجسيمين.
3. السرعة الزاوية لدوران الجسيم C بالنسبة للجسيم B .
4. التسارع الخطي للجسيم B بالنسبة للجسيم C .

الحل:

1. لتحديد وضع الجسيم C لدينا:

$$w_C = p/2 = \text{Const.}$$

نكامل:

$$q_C = (p/2)\, t + q_{C0}$$

لحساب ثابت المكاملة θ_{C0} لدينا:

$$t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q_{C0} = 0$$

حيث اعتبرنا مبدأ قياس الزوايا ينطبق على الوضع الابتدائي للجسيم C .

ومنه بالتعويض:

$$q_{C} = (p / 2)\, t$$

ولتحديد وضع الجسيم B لدينا:

$$w_{B} = (3p / 4)\, t$$

نكامل:

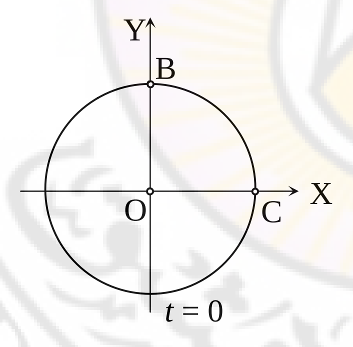
$$q_{B} = (3p / 8)\, t^{2} + q_{B0}$$

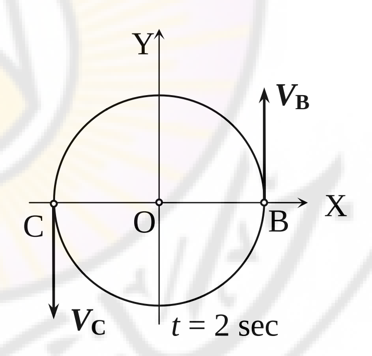
لحساب ثابت المكاملة θ_{B0} لدينا:

$$t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q_{B0} = p / 2$$

ومنه بالتعويض:

$$q_{B} = (3p / 8)\, t^{2} + p / 2$$





A b

(الشكل-2-31)

ومنه وضع الجسيمين C و B بعد ثانيتين هو:

$$\theta_{C} = \pi \qquad \text{و} \qquad \theta_{B} = 2\pi$$

أي أن الجسيم C سيكون على الجزء السالب للمحور OX ، بينما يكون الجسيم B على الجزء الموجب للمحور OX كما في (الشكل-2-31b).

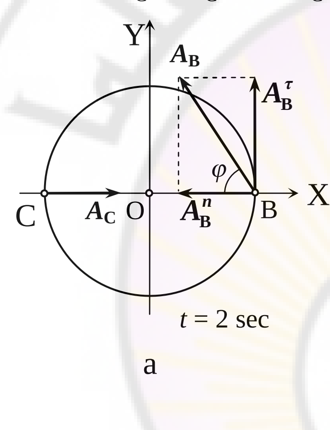
2. بما أن الجسيم C يتحرك على الدائرة بسرعة زاوية ثابتة، بالتالي القيمة العددية لسرعته الخطية بعد زمن ثانيتين تكون:

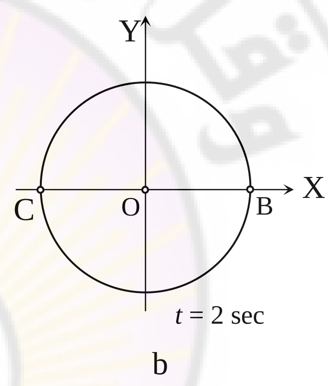
$$V_C = R.\omega_C = 10(\pi/2) = 5\pi \ \text{cm/sec} \downarrow$$

ومنحى $\boldsymbol{V_C}$ هو المماس للدائرة واتجاهه باتجاه دوران ω_C كما في (الشكل-2-30b).

أما تسارع الجسيم C فيساوي إلى التسارع الناظمي فحسب، الذي يتجه نحو مركز الدائرة كما في (الشكل-2-31a)، وقيمته العددية تعطى بـــ:

$$A_C = A_C^n = R.\omega_C^2 = 10(\pi/2)^2 = 2.5\pi^2 \ \text{cm/sec}^2 \rightarrow$$





(الشكل-2-32)

لكن الجسيم B يتحرك على الدائرة بسرعة زاوية متغيرة، بالتالي القيمة العددية لسرعته الخطية بعد زمن ثانيتين تكون:

$$V_B = R.\omega_B = 10(3\pi/2) = 15\pi \ \text{cm/sec} \uparrow$$

ومنحى $\boldsymbol{V_B}$ هو المماس للدائرة واتجاهه باتجاه دوران ω_B كما في (الشكل-2-30b).

أما تسارع الجسيم B فله مركبتان كما في (الشكل-2-31):

المركبة الناظمية التي تتجه نحو مركز الدائرة، وقيمتها العددية تعطى بـــ:

$$A_B^n = R.\omega_B^2 = 10(3\pi/4)^2 \times 2^2 = 22.5\pi^2 \ \text{cm/sec}^2 \leftarrow$$

وبما أن التسارع الزاوي للجسيم B يعطى بـــ :

$$\varepsilon_B = \dot{\omega}_B = 3\pi/4 \ \text{rad/sec}^2 = \text{const}$$

الذي يتجه باتجاه دوران ω_B ، بالتالي المركبة المماسية تتجه باتجاه دوران ε_B ، وقيمتها العددية تعطى بـــ:

$$A_B^t = R.\varepsilon_B = 10(3\pi/4) = 7.5\pi \ \ \text{cm/sec}^2 \uparrow$$

ومنه التسارع الكلي:

$$A_{\text{B}} = [(A_{\text{B}}^{t})^2 + (A_{\text{B}}^{n})^2]^{1/2} = 223\,\text{cm/sec}^2$$

وميل متجه التسارع الكلي على الناظم OX يحدد بالعلاقة:

$$\tan\varphi = \frac{A_{\text{B}}^{t}}{A_{\text{B}}^{n}} = \frac{7.5\pi}{22.5\pi^2} = 0.106 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = 6^{\circ}$$

3. تحدد السرعة الزاوية النسبية للجسيم C بالنسبة للجسيم B من العلاقة:

$$\omega_{\text{C/B}} = \frac{V_{\text{C/B}}}{\text{CB}}$$

وبما أن مناحي السرعات متوازية فإن:

$$V_{\text{C/B}} = V_{\text{C}} - V_{\text{B}} = 5\pi - (-15\pi) = 20\pi\ \text{cm/sec}$$

منه بالتعويض:

$$\omega_{\text{C/B}} = 20\pi / 20 = \pi\ \text{rad/sec}$$

4. يحدد التسارع الخطي النسبي للجسيم B بالنسبة للجسيم C من العلاقة:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{B/C}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{B}} - \boldsymbol{A}_{\mathbf{C}}$$

حيث:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{B}} = -22.5\pi^2.\boldsymbol{i} + 7.5\pi.\boldsymbol{j} \qquad , \qquad \boldsymbol{A}_{\mathbf{C}} = 2.5\pi^2.\boldsymbol{i}$$

ومنه بالتعويض نحصل على مركبات $\boldsymbol{A}_{\mathbf{B/C}}$:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{B/C}} = -25\pi^2.\boldsymbol{i} + 7.5\pi.\boldsymbol{j}$$

وقيمته العددية تساوي إلى:

$$A_{\text{B/C}} = [(25\pi^2)^2 + (7.5\pi)^2]^{1/2} = 248\,\text{cm/sec}^2$$

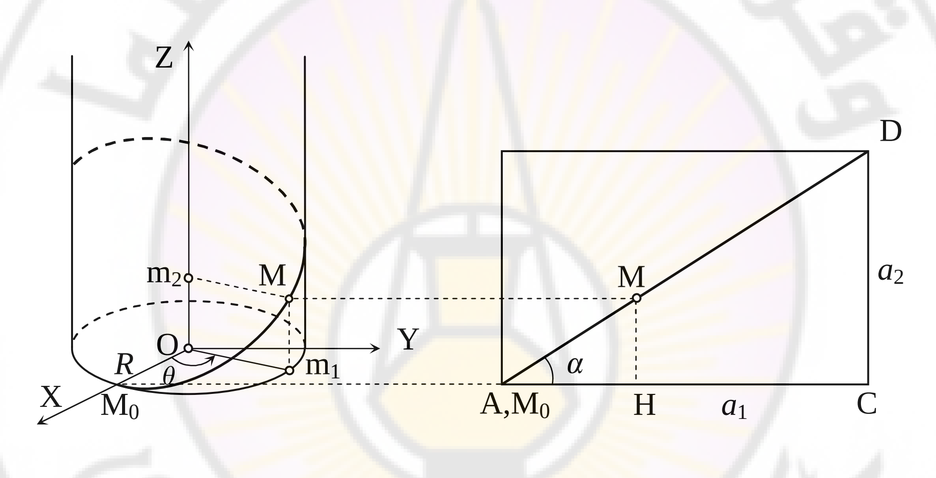
ويصنع المتجه $\boldsymbol{A}_{\mathbf{B/C}}$ زاوية φ مع المحور OX تعطى بالعلاقة:

$$\tan\gamma = \frac{7.5\pi}{25\pi^2} = 0.096 \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = 5.48^{\circ}$$

5- الحركة اللولبية لجسيم مادي *Spirogyra Motion of Particle*

5-1- معادلات الحركة اللولبية

اللولب الدائري هو خط منحنٍ جيوديزي خاص رُسِم على سطح أسطوانة دائرية نصف قطرها R ، ويمكن الحصول على اللولب الدائري بأن نأخذ مستطيلاً طوله ($a_1 = AC$) يساوي محيط قاعدة الأسطوانة ($a_1 = 2\pi.R$)، وعرضه ($a_2 = CD$) ، ومن ثم نرسم قطر المستطيل AD ، ونحيط الأسطوانة بالمستطيل، وبالتعريف يشكل المستطيل لولباً دائرياً كما في (الشكل-2-33).



(الشكل-2-33)

لدراسة حركة الجسيم M نعد ثلاثية متعامدة T(OXYZ) قائمة ومباشرة، حيث مبدأ الإحداثيات O ينطبق في مركز دائرة القاعدة، والمحور OZ ينطبق على محور الأسطوانة، والمستوي OXY ينطبق على مستوي القاعدة.

نعد أيضاً الوضع الابتدائي للجسيم المتحرك في M_0 الواقعة على المحور OX والمنطبقة على رأس المستطيل A ، عندئذ يتحرك الجسيم M على اللولب الدائري، وتتعين إحداثياته في اللحظة t بدلالة الثلاثية بالطريقة التالية:

نسقط M عمودياً على المستوي OXY ، حيث يقع المسقط على محيط دائرة القاعدة في m_1 ، ويكون:

$$Om_1 = R \qquad , \qquad OX \wedge Om_1 = q$$

يعني ما تقدم:

أن مسقط M على المستوي OXY هو m_1 الذي يتحرك حركة دائرية على دائرة القاعدة وفق العلاقة:

$$\mathbf{Om_1} = R.\cos q.\,\boldsymbol{i} + R.\sin q.\,\boldsymbol{j} \qquad (62\text{-}2)$$

أما مسقط M على المحور OZ فهو m_2 الذي يتحرك حركة مستقيمة على المحور OZ وفق العلاقة:

$$\mathbf{Om_2} = z.\,\boldsymbol{k} \qquad (63\text{-}2)$$

نستنتج بالتالي أن حركة الجسيم M اللولبية هي عبارة عن حركة مستقيمة وفق العلاقة (2-63)، وحركة دائرية وفق العلاقة (2-62).

يتم تعيين الطول z من معطيات المسألة، فمن الشكل (الشكل-2-33) لدينا:

$$z = \mathrm{HM} = \mathrm{AH}.\tan a$$

حيث AH يساوي طول القوس $\widehat{M_0m_1}$ الذي يساوي بدوره إلى:

$$\widehat{M_0m_1} = R.\theta$$

بالتعويض:

$$z = R.q.\tan a$$

بما أن الزاوية α ثابتة، ونصف قطر القاعدة R ثابت، فيمكن أن نضع:

$$R.\tan a = \mathrm{Cosnt.} = b \qquad (64\text{-}2)$$

حيث b عدد ثابت يدعى بالخطوة المختزلة للولب.

فإذا دارت m_1 على الدائرة دورة كاملة كان:

$$q = 2p$$

حينئذ تتحرك m_2 على المحور OZ مسافة تساوي a_2 ويكون:

$$z = b.2p = B$$

تدعى B بخطوة اللولب (*Pitch of Screw*) وهي عبارة عن المسافة التي يتقدم بموجبها مسقط M على OZ أي m_2 ، عندما يدور مسقط M في المستوي OXY أي m_1 دورة كاملة على دائرة القاعدة.

يمثل دوران Om_1 حول O بمتجه الدوران Ω الذي يقع دوماً على محور الأسطوانة OZ ويتجه وفق حركة اليد اليمنى، ويدعى بمحور اللولب أو محورالحركة اللولبية.

بالتالي العلاقة المتجهة للجسيم المتحرك M على اللولب هي من الشكل:

$$\mathbf{OM} = \mathbf{Om_1} + \mathbf{Om_2}$$

$$\mathbf{OM} = R.\cos q\,.\,\boldsymbol{i} + R.\sin q\,.\,\boldsymbol{j} + b.q\,.\boldsymbol{k} \qquad (65\text{-}2)$$

والتمثيل التحليلي لها هو:

$$x = R.\cos q \quad , \quad y = R.\sin q \quad , \quad z = b.q \qquad (66\text{-}2)$$

والمعادلات في العلاقة (2-66) تمثل معادلات حركة الجسيم على المسار اللولبي.

2-5- السرعة الخطية *Linear Velocity*

باشتقاق العلاقة (2-65) بدلالة الزمن:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}} = \frac{\boldsymbol{d}\mathbf{M}}{dt} = -\dot{q}.R.\sin q\,.\,\boldsymbol{i} + \dot{q}.R.\cos q\,.\,\boldsymbol{j} + b.\dot{q}.\boldsymbol{k} \qquad (67\text{-}2)$$

تكتب أيضاً بالشكل:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}} = b.\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM}$$

بالفعل فإن:

$$b.\boldsymbol{\Omega} = b.\dot{q}.\boldsymbol{k}$$

وأيضاً:

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \dot{q} \\ R.\cos q & R.\sin q & b.q \end{vmatrix} = -\dot{q}.R.\sin q\,.\boldsymbol{i} + \dot{q}.R.\cos q\,.\boldsymbol{j}$$

وبالتالي فإن $b.\boldsymbol{\Omega}$ تمثل سرعة m_2 مسقط M على المحور OZ أي:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{m_2}} = b.\boldsymbol{\Omega}$$

وقيمتها العددية:

$$V_{m_2} = b.w$$

في حين $\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM}$ تمثل سرعة m_1 مسقط M على المستوي OXY أي:

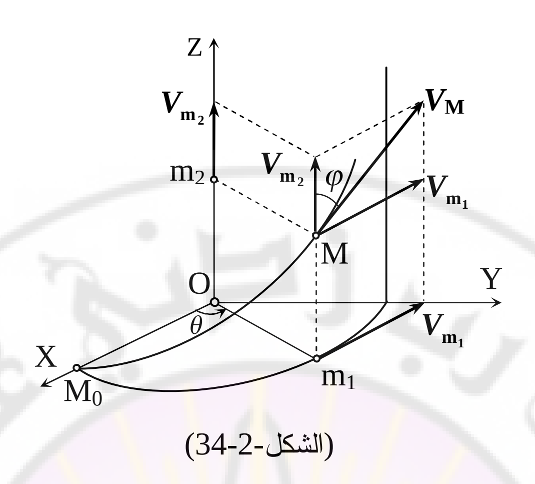
$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{m_1}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM}$$

وقيمتها العددية:

$$V_{m_1} = R.w$$

فيمكن كتابة العلاقة (2-67) على الشكل التالي:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{m_1}} + \boldsymbol{V}_{\mathbf{m_2}} \qquad (68\text{-}2)$$



(الشكل-2-34)

ننشئ في M متجهين يسايران $\boldsymbol{V}_{m_1}$ و $\boldsymbol{V}_{m_2}$ كما في (الشكل-2-34)، بحيث $\boldsymbol{V}_{m_1}$ يوازي المستوي OXY ، ويمس الأسطوانة في M ، في حين $\boldsymbol{V}_{m_2}$ يوازي محور اللولب OZ المار من M ، بالتالي $\boldsymbol{V}_{M}$ تكون مماسة للولب في M في مستوي شاقولي يوازي محور الأسطوانة، ويمس الأسطوانة في M ، ومنه تقع $\boldsymbol{V}_{M}$ في المستوي المماس للأسطوانة في M ، وتصنع مع محور الأسطوانة زاوية φ ثابتة تعطى بالعلاقة:

$$\tan j = \frac{V_{m_1}}{V_{m_2}} = \frac{R|w|}{b|w|} = \frac{R}{b} = \text{Const.} \qquad (69\text{-}2)$$

وهذه خاصة أساسية في اللولب الدائري إذا يصنع المماس للولب في كل نقطة منه M زاوية ثابتة مع محور اللولب، أما القيمة العددية للسرعة فهي:

$$V_M = (V_{m_1}^2 + V_{m_2}^2)^{1/2} = (R^2.w^2 + b^2.w^2)^{1/2} = w\,(R^2 + b^2)^{1/2} \qquad (70\text{-}2)$$

3-5- التسارع الخطي *Linear Acceleration*

باشتقاق علاقة السرعة الخطية (2-68) نحصل على علاقة متجه التسارع الخطي:

$$\boldsymbol{A}_M = \frac{d\boldsymbol{V}_M}{dt} = \frac{d\boldsymbol{V}_{m_1}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{V}_{m_2}}{dt} = \boldsymbol{A}_{m_1} + \boldsymbol{A}_{m_2}$$

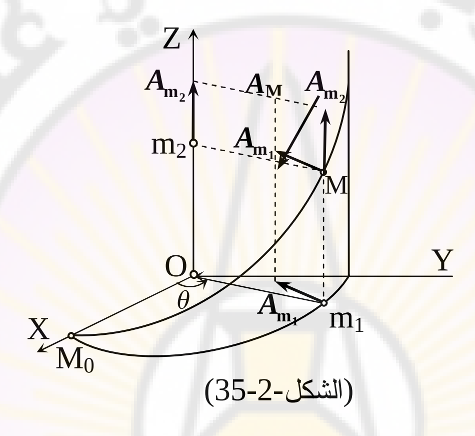
حيث المركبة $(\boldsymbol{A}_{m_2} = b.\dot{\boldsymbol{\Omega}})$ هي متجه طليق يوازي محور اللولب، لأن المتجه $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ يوازي المتجه $\boldsymbol{\Omega}$ ، والمتجه $\boldsymbol{\Omega}$ هو ثابت المنحى.

والمركبة $\boldsymbol{A}_{m_1}$ هي متجه طليق يوازي المستوي OXY ، ويحسب من تسارع متحرك يتحرك على محيط دائرة.

بالتالي تؤول علاقة متجه التسارع الخطي إلى:

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{m_1}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{m_2}} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{m_1}} + \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{\tau}}_{\mathrm{m_1}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{m_2}} \quad (71\text{-}2)$$

ننشئ من M متجهين يسايران $\boldsymbol{A}_{\mathrm{m_1}}$ و $\boldsymbol{A}_{\mathrm{m_2}}$ كما في (الشكل-2-35)، بحيث تقع المركبة $\boldsymbol{A}_{\mathrm{m_1}}$ في مستوي يوازي مستوي الدائرة، في حين المركبة $\boldsymbol{A}_{\mathrm{m_2}}$ تقع في مستوي عمودي على مستوي الدائرة ويوازي محور اللولب، ومنه متجه التسارع الخطي $\boldsymbol{A}_{\mathrm{M}}$ يقع في مستوي شاقولي يوازي محور اللولب، وينطبق على المستوي الملاصق للولب في النقطة M.



(الشكل-2-35)

بما أن المسقط m_1 يتحرك على مسار دائرة فإن:

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{m_1}} = R.w^2.\boldsymbol{n}$$

وإذا اعتبرنا الجسيم M يتحرك على مسار منحن:

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}}_{\mathrm{M}} = \frac{V_{\mathrm{M}}^2}{r}.\boldsymbol{n}$$

ومنه بالتساوي:

$$r = \frac{V_{\mathrm{M}}^2}{R.w^2}$$

وبتعويض قيمة V_{M} من العلاقة (2-70) نحصل على:

$$r = \frac{R^2 + b^2}{R} \quad (72\text{-}2)$$

وتعطينا العلاقة الأخيرة نصف قطر انحناء اللولب في النقطة M ، وهي كما نرى لا علاقة لها بالزمن، أي لا علاقة لها بوضع الجسيم M على اللولب، ويعني ذلك أن نصف قطر انحناء اللولب ثابت، وهي خاصة هندسية تتصف بها اللوالب الدائرية.

4-5- الحركة اللولبية المنتظمة

إذا كان متجه الدوران $(\boldsymbol{\Omega} = w.\boldsymbol{k})$ ثابتاً كانت عندها الحركة اللولبية منتظمة، في هذه الحالة تكون القيمة العددية لــ ω ثابتة، والقيمة العددية للسرعة الخطية ثابتة أيضاً:

$$V_{\mathrm{M}} = w(R^2 + b^2)^{1/2}$$

أما متجه التسارع الخطي المعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{M}} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}}_{\mathbf{m}_1} + \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{m}_1} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{m}_2}$$

حيث $(\boldsymbol{A}_{\mathbf{m}_2} = 0)$ لأن حركة m_2 على محور اللولب هي حركة مستقيمة منتظمة.

و $(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{m}_1} = 0)$ لأن حركة m_1 على دائرة القاعدة هي حركة دائرية منتظمة.

ومنه بالتعويض:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{M}} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}}_{\mathbf{m}_1} \qquad (73\text{-}2)$$

فالتسارع الخطي للجسيم يؤول إلى تسارع ناظمي، ويتجه على الناظم الأساسي للولب، أو على الناظم للأسطوانة في M وقيمته العددية $R\,.\,\omega^2$ ثابتة.

مسألة -2-22

يتحرك جسيم M على لولب دائري بحركة منتظمة، وفق معادلات الحركة التالية:

$$x = a.\cos wt \quad , \quad y = a.\sin wt \quad , \quad z = b.wt$$

حيث ω , a , b ثوابت، وبما أن الحركة منتظمة لذا كان $(\theta = \omega t)$، المطلوب إيجاد:

1. السرعة الخطية للجسيم وزاوية ميله على المحور OZ .
2. السرعة الزاوية ω .
3. التسارع الخطي للجسيم وبرهن أن متجه تسارعه يتعامد مع متجه سرعته.
4. نصف قطر انحناء المسار في M .

الحل:

1. تحدد القيمة العددية لسرعة الجسيم من مركبات متجه السرعة، وهي:

$$V_{\mathrm{X}} = \dot{x} = -w.a.\sin wt \quad , \quad V_{\mathrm{Y}} = \dot{y} = w.a.\cos wt \quad , \quad V_{\mathrm{Z}} = \dot{z} = b.w$$

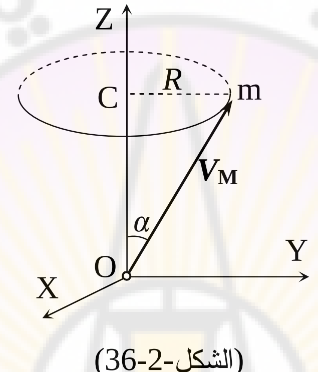
ومنه القيمة العددية للسرعة:

$$V_{\mathrm{M}} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{1/2} = (a^2.w^2 + b^2.w^2)^{1/2} = w(a^2 + b^2)^{1/2}$$

نلاحظ أن القيمة العددية للسرعة ثابتة، ويصنع المتجه $\boldsymbol{V}_{\mathrm{M}}$ مع المحور OZ زاوية α تساوي إلى:

$$\cos a = V_{\mathrm{Z}} / V = b.w / w\,(a^2 + b^2)^{1/2} = b / (a^2 + b^2)^{1/2}$$

أي أن المماس في M يصنع مع محور اللولب زاوية α ثابتة، بالتالي المحل الهندسي للنقطة m نهاية متجه السرعة الخطية هو دائرة توازي المستوي OXY مركزها C ونصف قطرها R وتدعى براسم خطى حركة الجسيم (*Hodograph*) الموضح في (الشكل-2-36).



(الشكل-2-36)

لتعيين R لدينا من (الشكل-2-36):

$$R = \mathrm{Cm} = [V_{\mathrm{M}}^2 - (\mathrm{OC})^2]^{1/2}$$

حيث:

$$\mathrm{OC} = \mathrm{Om}.\cos a = V_{\mathrm{M}}.\cos a$$

منه:

$$\mathrm{OC} = w\,(a^2 + b^2)^{1/2}.b / (a^2 + b^2)^{1/2} = b.w = V_{\mathrm{Z}} = \mathrm{Const.}$$

بالتعويض في علاقة R نحصل على:

$$R = [w^2\,(a^2 + b^2) - b^2.w^2]^{1/2} = (a^2.w^2)^{1/2} = a.w = \mathrm{Const.}$$

2. لتعيين السرعة الزاوية لدينا من (الشكل-2-36):

$$\mathrm{Cm} = R \quad \Rightarrow \quad V_{\mathrm{M}}.\sin a = w.a \quad \Rightarrow \quad w = V_{\mathrm{M}}.\sin a / a$$

3. تحدد القيمة العددية لتسارع الجسيم من مركبات متجه التسارع، وهي:

$$A_{\mathrm{X}} = \ddot{x} = -w^2.a.\cos w\,t \quad , \quad A_{\mathrm{Y}} = \ddot{y} = -w^2.a.\sin w\,t \quad , \quad A_{\mathrm{Z}} = \ddot{z} = 0$$

ومنه القيمة العددية للتسارع:

$$A_{\mathrm{M}} = (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2)^{1/2} = (a^2.w^4)^{1/2} = a.w^2$$

ولبرهان أن متجه التسارع A_M يعامد متجه السرعة V_M نكتب:

$$\boldsymbol{A_M}.\boldsymbol{V_M} = A_X.V_X + A_Y.V_Y + A_Z.V_Z$$

بالتعويض:

$$\boldsymbol{A_M}.\boldsymbol{V_M} = w^3.a^2.\cos wt.\sin wt - w^3.a^2.\sin wt.\cos wt = 0$$

إذن متجه التسارع يتعامد مع متجه السرعة، وهذا واضح من نص المسألة، حيث إن حركة الجسيم M على اللولب الدائري هي حركة منتظمة متجه تسارعها يوازي دوماً المستوي OXY ، وبما أن متجه السرعة يقع في المستوي الشاقولي العمودي على المستوي OXY ، والذي يمس الأسطوانة التي رسم عليها اللولب الدائري، بالتالي متجه التسارع $\boldsymbol{A_M}$ يعامد دوماً متجه السرعة $\boldsymbol{V_M}$.

4. لحساب نصف قطر الانحناء في M لدينا علاقة متجه التسارع الخطي:

$$\boldsymbol{A_M} = \boldsymbol{A_M^n} \quad \Rightarrow \quad A_M = A_M^n \quad \Rightarrow \quad A_M = V_M^2 / r$$

لانعدام مركبة التسارع المماسي لحركة مسقط الجسيم على دائرة القاعدة، لأنها حركة دائرية منتظمة، وانعدام مركبة التسارع لحركة مسقط الجسيم على محور اللولب، لأنها حركة مستقيمة منتظمة.

نعوض بالقيم المعطاة نحصل على:

$$a.w^2 = w^2(a^2+b^2)/r \quad \Rightarrow \quad r = (a^2+b^2)/a$$

من جهة ثانية لدينا من علاقة زاوية ميل السرعة أن:

$$\cos^2 a = b^2/(a^2+b^2)$$

ومنه:

$$1-\sin^2 a = b^2/(a^2+b^2) \quad \Rightarrow \quad a^2+b^2 = a^2/\sin^2 a$$

بالتعويض في قيمة ρ نحصل على:

$$r = a/\sin^2 a$$

مسألة -2-23

إذا كانت إحداثيات جسيم متحرك M معينة بدلالة الزمن معطاة بالعلاقات:

$$x = a.\cos wt/wt \quad , \quad y = a.\sin wt/wt \quad , \quad z = b.w.t$$

حيث b. a . ω ثوابت، فإذا كان (ω=1 rad/sec) و (b=a.tan α=a/2)، المطلوب تعيين:

1. معادلة مسار الجسيم M .
2. معادلة مسار مسقط الجسيم M على المستوي OXY .
3. معادلة السرعة الخطية والتسارع الخطي للجسيم M .
4. المسافة التي قطعها المتحرك حين يزداد الزمن من $(t = \sqrt{2}\ \text{sec})$ إلى $(t = t_1)$.
5. معادلة تقوس مسار الجسيم M في نقطة ما من المنحني.

الحل:

1. نعوض قيم الثوابت في معادلات الحركة نحصل على:

$$x = (a.\cos t)/t \qquad , \qquad y = (a.\sin t)/t \qquad , \qquad z = a.t/2$$

ويتم تعيين معادلة مسار الجسيم المتحرك M بحذف الوسيط t من هذه العلاقات التي تحدد إحداثياته، والتي تمثل معادلات حركته، حيث نلاحظ أن:

$$x^2 + y^2 = a^2/t^2 \quad , \quad z^2 = a^2.t^2/4$$

ومن هاتين العلاقتين نحصل على معادلة مسار الجسيم M :

$$z^2(x^2 + y^2) = a^4/4$$

وهذه العلاقة تمثل معادلة سطح دوراني محوره OZ .

2. يتعين معادلة مسار مسقط M على المستوي OXY بالمعادلتين:

$$x = a.\cos t/t \qquad , \qquad y = a.\sin t/t$$

بالانتقال إلى الإحداثيات القطبية حيث:

$$r^2 = x^2 + y^2 = a^2/t^2 \qquad \Rightarrow \qquad r = a/t$$

$$\tan q = y/x = \tan t \qquad \Rightarrow \qquad q = t$$

ومن هاتين العلاقتين نحصل على معادلة مسار مسقط الجسيم M على المستوي OXY الممثلة بالمعادلة القطبية التالية:

$$r.q = a$$

3. تحدد القيمة العددية لسرعة الجسيم من مركبات السرعة، وهي:

$$V_X = \dot{x} = a(-t.\sin t - \cos t)/t^2$$

$$V_Y = \dot{y} = a(t.\cos t - \sin t)/t^2$$

$$V_Z = \dot{z} = a/2$$

ومنه القيمة العددية للسرعة:

$$V_{\text{M}} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{1/2} = a(t^2+2)/2t^2$$

وتحدد القيمة العددية لتسارع الجسيم من مركبات التسارع، وهي:

$$A_{\text{X}} = \ddot{x} = a(-t^2.\cos t + 2t.\sin t + 2\cos t)/t^3$$

$$A_{\text{Y}} = \ddot{y} = a(-t^2.\sin t - 2t.\cos t + 2\sin t)/t^3$$

$$A_{\text{Z}} = \ddot{z} = 0$$

ومنه القيمة العددية للتسارع:

$$A_{\text{M}} = (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2)^{1/2} = a\ \ (t^4+4)^{1/2}/t^3$$

4. لتعيين المسافة التي قطعها المتحرك من الزمن $(t = \sqrt{2}\ \text{sec})$ إلى $(t = t_1)$، والممثلة بطول القوس من المسار، لدينا:

$$V_{\text{M}} = \frac{ds}{dt} = \frac{a}{2}\frac{(t^2+2)}{t^2} \qquad \Rightarrow \qquad ds = \frac{a}{2}\frac{(t^2+2)}{t^2}dt$$

وبتكامل هذه العلاقة من $(t = \sqrt{2}\ \text{sec})$ إلى $(t = t_1)$:

$$\Delta s = \frac{a}{2}\left[\frac{(t^2-2)}{t}\right]_{\sqrt{2}}^{t_1} = \frac{a}{2}\left[\frac{t_1^2-2}{t_1}\right]$$

5. يحسب تقوس مسار الجسيم من العلاقة:

$$A_{\text{M}}^n = \frac{V_{\text{M}}^2}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{r} = \frac{A_{\text{M}}^n}{V_{\text{M}}^2}$$

بما أن التسارع الناظمي يساوي:

$$(A_{\text{M}}^n)^2 = (A_{\text{M}})^2 - (A_{\text{M}}^t)^2$$

حيث التسارع المماسي يعطى بالعلاقة:

$$A_{\text{M}}^t = \dot{V}_{\text{M}} = -2a/t^3$$

بالتعويض:

$$A_{\text{M}}^n = a/t$$

ومنه:

$$\frac{1}{r} = \frac{a/t}{a^2(t^2+2)^2/4t^4} = \frac{4t^3}{a(t^2+2)^2}$$

6-الحركة الدورية لجسيم مادي *Periodical Motion of Particle*

1-6- معادلة الحركة الدورية

الحركة الدورية لجسيم هي الحركة التي تحقق فيها معادلة المسافة العلاقة التالية:

$$s(t+\alpha)=s(t) \qquad (74\text{-}2)$$

حيث α عدد حقيقي ما أبعاده أبعاد زمن.

ونسمي دور الحركة (*Period*) أصغر عدد موجب لــ α يحقق العلاقة (2-74)، ونرمز له بــ T ويكون:

$$s(t+T)=s(t)$$

نشتق العلاقة بالنسبة للزمن:

$$\dot{s}(t+T)=\dot{s}(t)$$

$$\ddot{s}(t+T)=\ddot{s}(t)$$

فالقيمة العددية للسرعة والقيمة العددية للتسارع المماسي في الحركات الدورية هما مقداران دوريان دورهما T ، والذي يساوي دور معادلة المسافة، بالتالي لدراسة خصائص الحركات الدورية يكفي دراسة تحولات المسافة والسرعة والتسارع المماسي في مجال زمني محصور بين (t و $t+T$) أو بين ($t=0$ و $t=T$).

إن الزمن الفاصل بين مرورين متتاليين للجسيم من المكان نفسه وباتجاه واحد يمثل دور الحركة، ونسمي انتقال المتحرك خلال فترة دور واحد بالنوسة الكاملة، كما نسمي عدد النوسات أو عدد الاهتزازات في واحدة الزمن بالتواتر، ونرمز له بــ f_r ، حيث:

$$f_r=\frac{1}{T} \qquad (75\text{-}2)$$

وأبسط الحركات الدورية هي الحركة التي يربط فيها انتقال الجسيم s مع الزمن بإحدى التوابع المثلثية الممثلة بعلاقة من الشكل:

$$s(t)=a.\sin(\omega t+\varphi) \qquad (76\text{-}2)$$

$$s(t)=a.\cos(\omega t+\varphi) \qquad (77\text{-}2)$$

حيث ω و a و φ ثوابت.

ونسمي هذه الحركة بالحركة التوافقية أو الحركة الاهتزازية البسيطة أي الحركة النوسية أو الحركة الجيبية.

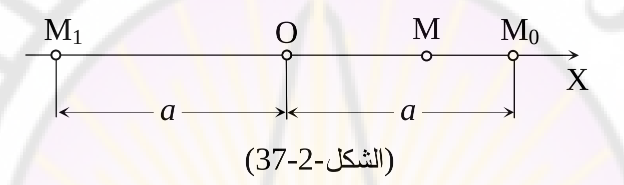
2-6- الحركة التوافقية البسيطة *Simple Harmonic Motion*

تعطى الحركة التوافقية البسيطة (ح . ت . ب) بالمعادلة التالية:

$$s(t) = a.\cos w t \qquad (78\text{-}2)$$

وتعد الحركة التوافقية المستقيمة من أبسط أنواع الحركات التوافقية، والتي يكون مسار المتحرك فيها مستقيماً.

لندرس حركة الجسيم M على المسار المستقيم OX الموضح في (الشكل-2-37)، والتي يتغير خلالها بمرور الزمن بعد الجسيم x عن نقطة الأصل O .



(الشكل-2-37)

يمكننا أن نضع وفقاً للعلاقة (2-78) معادلة الحركة التوافقية البسيطة:

$$x(t) = a.\cos w t \qquad (79\text{-}2)$$

حيث ω و a ثوابت.

فالمتحرك M لا يرسم المحور OX بكامله، بل ينتقل على قطعة منه محصورة بين النقطتين M_1 و M_0 ، ويتحرك وفق العلاقة (2-79) بحركة متذبذبة بين الموضعين $M(-a)$ و $M(a)$ ، لأن القيمة العظمى للعلاقة (2-79) هي:

$$x = \pm a \qquad \Rightarrow \qquad OM_1 = -a \qquad , \qquad OM_0 = +a$$

حيث نسمي x بعد الجسيم عن نقطة الأصل بمطال الحركة الاهتزازية أو الحركة التوافقية، والعدد الموجب a بسعة الحركة التوافقية أو سعة الذبذبة (*Amplitude*) المساوي لأكبر انحراف للجسيم من مركز الاهتزاز، أو مبدأ الفصول O ، والمقدار ωt بطور الحركة أو صفحتها، والعدد الحسابي ω بنبض الحركة.

فإذا بدأ الجسيم M حركته من ($t = 0$) من الموضع M_0 ، فإنها تعود من جديد إلى هذا الموضع في اللحظة t_1 التي يكون فيها:

$$\cos w t_1 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad w t_1 = 2p \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = 2p / w$$

ويقابل الزمن t_1 الدور T ، أو الزمن الدوري للاهتزازة، وهو الزمن الذي يتم الجسيم خلاله دور الحركة، أي أن:

$$T = 2p / w$$

وبما أن الحركة دورية دورها T يمكن أن نكتب:

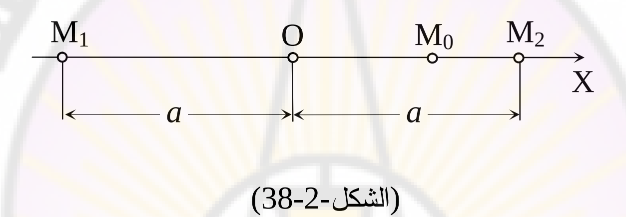
$$x(t) = x(t+T) = a.\cos[\omega(t+T)]$$

وإذا كان العدد الثابت φ يحدد وضع الجسيم M_0 في اللحظة ($t_0 = 0$)، ويدعى بفرق الصفحة، فيمكن كتابة العلاقة الأخيرة على الشكل:

$$x(t) = x(t+T) = a.\cos[\omega(t+T)+\varphi]$$

فإذا درسنا الحركة خلال الدورة الأولى المحصورة بين الموضعين M_1 و M_2 ، كما هو مبين في (الشكل-2-38)، كان:

$$x(t) = a.\cos(\omega t+\varphi) \qquad (80\text{-}2)$$



(الشكل-2-38)

باعتبار O مبدأ الإحداثيات على المحور OX ، أي ($OM = x$) كان المتحرك في اللحظة ($t = 0$) في الموضع الابتدائي M_0 المحدد بالعلاقة:

$$OM_0 = x_0 = a.\cos(0+\varphi) = a.\cos\varphi \qquad (81\text{-}2)$$

فإذا كان $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ وقعت M_0 على يمين O .

وإذا كان $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ وقعت M_0 على يسار O .

وإذا كان $\varphi = (2k+1)\pi/2$ ، حيث k عدد صحيح موجب أو سالب أو معدوم، مر المتحرك في اللحظة ($t = 0$) من المبدأ O .

وإذا كان $\varphi = k\pi$ حيث k عدد صحيح، مر عندها المتحرك في اللحظة ($t = 0$) من الموضع M_1 أو M_2 ، وبسرعة ابتدائية تعطى بالعلاقة:

$$V_0 = \dot{x}_0 = \frac{d}{dt}a.\cos(0+\varphi) = -a.\omega.\sin\varphi \qquad (82\text{-}2)$$

وتوضح المعادلتان (2-81) و (2-82) أن الثابتين φ و ω يمكن تعيينهما بشكل عام من الأوضاع الابتدائية، فمن المعادلتين بعد الاختصار نحصل على:

$$a = (x_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega^2})^{1/2} \qquad , \qquad \tan\varphi = -\frac{V_0}{\omega.x_0} \qquad (83\text{-}2)$$

فإذا بدأ الجسيم الحركة من الموضع M_1 حيث:

$$V_{M_1} = V_0 = 0$$

تعطي المعادلة (2-83):

$$j = 0$$

وتصبح معادلة الحركة (2-80) بالشكل:

$$x = a.\cos w t$$

أي يبدأ الجسيم الحركة من أحد أطراف الحركة من السكون.

وإذا بدأ الجسيم الحركة من مركز الحركة O حيث:

$$x_0 = 0$$

تعطي المعادلة (2-83):

$$j = -p/2$$

وتصبح معادلة الحركة (2-80) بالشكل:

$$x = a.\sin w t$$

أي يبدأ الجسيم الحركة من الموضع الابتدائي من مركز الحركة O بسرعة قصوى قدرها:

$$V_0 = V_{max} = a\,.\,w\,.$$

وعموماً يتحدد الشكل العام للحركة التوافقية البسيطة (2-80)، بتحديد الثوابت φ و a ، التي تتحدد بدورها من شروط الحركة الابتدائية.

مسألة 2-2-24

بين أن الحركة المستقيمة المعينة بالمعادلة الزمنية التالية:

$$x(t) = 2\cos^2 t + \sin^2 t - 3$$

هي حركة نوسية بسيطة، وعين دور الحركة وسعتها ومركز نوساتها.

الحل:

نعلم أن:

$$2\cos^2 t = 1 + \cos 2t \quad , \quad \sin^2 t = (1 - \cos 2t)/2$$

بالتعويض في معادلة الحركة نجد:

$$x = -(3/2) + (1/2)\cos 2t$$

وهي معادلة حركة نوسية بسيطة، حيث:

نبضها:

$$w = 2 \text{ rad/sec}$$

ودورها:

$$T = 2p / w = p = 3.14 \sec$$

وسعتها:

$$a = 1/2 \text{ cm}$$

ومركز نوساتها:

$$x = -3/2 \text{ cm}$$

3-6- السرعة الخطية والتسارع الخطي

Linear Velocity and Linear Acceleration

بما أن الحركة مستقيمة فمتجها السرعة والتسارع يتجهان على المحور، ويكفي لدراستهما تعيين قيمتهما الجبريتين V و A ، فإذا فرضنا معادلة الحركة من الشكل:

$$x = a.\cos wt \qquad (84\text{-}2)$$

وبتفاضل المعادلة (2-84) بالنسبة للزمن نحصل على معادلة السرعة:

$$V = \dot{x} = -a.w.\sin wt \qquad (85\text{-}2)$$

وبتفاضل المعادلة (2-85) بالنسبة للزمن نحصل على معادلة التسارع:

$$A = \ddot{x} = -a.w^2.\cos wt \qquad (86\text{-}2)$$

إن مخططات هذه المقادير بالنسبة للزمن، هي عبارة عن منحنيات جيبيه مزاحة بالنسبة للزمن لبعضها بعضاً، إذ تتكرر دورياً أي أن المنحنيات تكرر نفسها بعد انقضاء مجال زمني مقداره T ، كما هو واضح على (الشكل-2-39a).

نلاحظ أن السرعة تصبح عظمى أو صغرى عندما يكون الانتقال صفراً، وأن العكس صحيح أيضاً، وأنه يوجد بين السرعة V والمطال x علاقة مستقلة عن الزمن، وذلك من العلاقة (2-84):

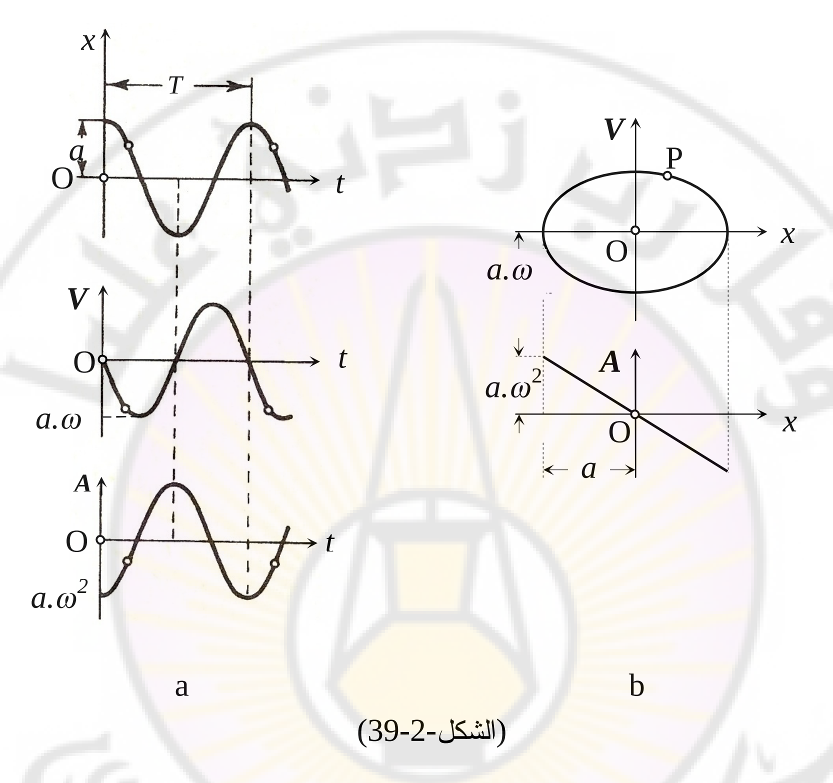
$$x / a = \cos wt$$

ومن العلاقة (2-85):

$$V / a.w = -\sin wt$$

بالتربيع ثم بالجمع نحصل على:

$$(x^2/a^2)+(V^2/a^2.w^2)=1 \quad (87\text{-}2)$$



(الشكل-2-39)

فإذا أخذنا جملة إحداثية متعامدة OXV الموضحة في (الشكل-2-39b) مثلت العلاقة (2-87) في المستوي بقطع ناقص، محوراه $2a$ و $2a\omega$ ، فعندما يزداد الزمن t بقدر دور واحد T ترسم النقطة $P(x, V)$ كامل القطع.

نلاحظ أن حركة P على القطع تبين لنا كيف تتغير السرعة حينما يتحرك الجسيم على مساره، فترتيب P يعين لنا سرعة المتحرك في أي موضع M_x من المسار، ومن إشارة السرعة يعرف اتجاه حركة الجسيم على مساره، ومن تزايد القيمة المطلقة للسرعة أو تناقصها، يعرف تسارع الحركة أو تباطؤها، وبذلك يمكن دراسة الحركة بكاملها اعتماداً على القطع.

هذا ونلاحظ من المعادلة (2-87) أن القطع متناظر بالنسبة لمحوريه، فعندما يأخذ المطال x قيمة معينة، يكون للسرعة V قيمتان متناظرتان، فالمتحرك يمر من كل نقطة من مساره مرتين في دور واحد، ويكون لسرعته في تلك النقطة قيمتان متناظرتان.

كما نلاحظ أيضاً أنه حين تأخذ السرعة V قيمة معينة، يكون للمطال x قيمتان متناظرتان، فعندما يمر المتحرك أثناء حركته المباشرة أو الرجعية من نقطتين متناظرتين بالنسبة لمركز النوسان، يكون لسرعته قيمة حسابية واحدة، وتساعد العلاقة (2-87) في حساب سرعة المتحرك في كل وضع من أوضاعه بالشكل:

$$V = \pm w\,(a^2 - x^2)^{1/2} \qquad (88\text{-}2)$$

حيث نستنتج أن قيمة السرعة عند الموضعين المتطرفين تساوي الصفر $(x = \pm a)$، بينما تبلغ نهايتها العظمى عند مركز الذبذبة $(x = 0)$.

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{\max} = \pm a.w \quad \Rightarrow \quad |V_{\max}| = a.w$$

كذلك نلاحظ أنه يوجد بين التسارع A والمطال x علاقة مستقلة عن الزمن، وذلك بحذف الزمن بين (2-84) و (2-86)، حيث يتضح أن التسارع A يرتبط بالوضع العام x على النحو التالي:

$$A = \ddot{x} = -w^2.x \qquad (89\text{-}2)$$

تعني هذه المعادلة أن مقدار التسارع A دائماً متناسب مع بعد الجسيم x عن نقطة الأصل O ، حيث ينعدم عند مركز الذبذبة، بينما يبلغ نهايته العظمى في الموضعين المتطرفين، والإشارة السالبة تعني أن تسارع الجسيم يتجه دائماً نحو نقطة الأصل O ، فإذا كان الجسيم في موضع تكون فيه x موجبة أي يمين نقطة الأصل، فإن التسارع يكون سالباً أي أن الجسيم يتجه نحو O ، وإذا كانت x سالبة فإن التسارع يكون موجباً أي أن الجسيم يتجه أيضاً نحو O ، وعلى ذلك تعرف الحركة التوافقية البسيطة بأنها حركة جسيم في خط مستقيم بتسارع مركزي يتجه دائماً نحو المركز الثابت O ، ويتناسب مع بعده عنه.

كما نلاحظ أن سرعة الجسيم وتسارعه تتغيران خلال هذه الحركة بتغير الزمن وفقاً لمعادلة الحركة التوافقية، ويمكن بسهولة التحقق بواسطة إشارتي V و A ، من أنه عندما يتحرك الجسيم متجهاً إلى مركز الذبذبة تكون حركته متسارعة، وعندما يتحرك من مركز الذبذبة تكون الحركة متباطئة.

كذلك إذا لاحظنا من (الشكل-2-37) أن:

$$\mathbf{OM} = x.\boldsymbol{i}$$

فيكون:

$$\boldsymbol{A} = \ddot{x}.\boldsymbol{i} = A.\boldsymbol{i} = -\omega^2.\mathbf{OM} \qquad (90\text{-}2)$$

فمتجه التسارع إذن يتجه دوماً نحو نقطة الأصل أي نحو مركز النوسان.

كما نلاحظ أن العلاقة (2-89) تعبر عن معادلة خط مستقيم المبين في (الشكل-2-39b)، التي تكتب على الشكل التالي:

$$\ddot{x} + \omega^2.x = 0 \qquad (91\text{-}2)$$

والتي تعد المعادلة التفاضلية للحركة الاهتزازية، وسنعود إلى مناقشتها في بحث تحريك الجسيم المادي.

مسالة -2-25

يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة سعتها ($a = 20$ cm)، وبعد ثانيتين من البدء كان للسرعة والتسارع الاتجاه نفسه، وكان لهما المقداران ($V = 4$ cm/sec) و ($A = 5$ cm/sec^2) على الترتيب. المطلوب إيجاد الزمن الدوري والموضع الابتدائي، وكذلك الموضع بعد ($t = 10$ sec).

الحل:

بفرض أن المسافة مقاسة من مركز الذبذبة هي x يكون لدينا:

$$V = \pm w\,(a^2 - x^2)^{1/2} \qquad , \qquad A = -w^2.x$$

بالتعويض:

$$-4 = w\,(400 - x^2)^{1/2} \qquad , \qquad -5 = -w^2.x$$

الإشارتان سالبتان لأن السرعة والتسارع في اتجاه واحد أي نحو مركز الذبذبة ومنه:

$$16 = w^2\,(400 - x^2) \qquad , \qquad w^2 = 5/x$$

من هاتين العلاقتين نحصل على بعد النقطة من مبدأ الحركة:

$$x = 18.5 \text{ cm}$$

وعلى النبض:

$$w = 0.52 \text{ rad/sec}$$

وعلى الزمن الدوري:

$$T = 2p/w = 12.1 \text{ sec}$$

أما الوضع عند أي لحظة فيعطى بالمعادلة:

$$x = a.\cos(\omega t + \varphi)$$

بالتعويض:

$$x = 20.\cos(0.52t + \varphi)$$

ومن الشرط:

$$t = 2\,\text{sec} \quad \Rightarrow \quad x = 18.5\,\text{cm}$$

بالتعويض:

$$18.5 = 20.\cos(1.04 + \varphi)$$

ومنه:

$$\varphi = -37^o13' = -0.65\,\text{rad}$$

أما موضع المتحرك بعد زمن:

$$t = 10\,\text{sec}$$

فهو:

$$x = 20\cos(5.2 - 0.65) = -3.2\,\text{cm}$$

مسالة -2-26

ادرس الحركة التوافقية التالية:

$$x(t) = a.\cos(\omega t + \varphi)$$

الحل:

لدراسة الحركة في المجال الزمني المحصور بين (t و $t + T$)، نختار عادة t لحظة مرور المتحرك في مركز النوسان O ومنه:

$$x(t) = a.\cos(\omega t + \varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega t + \varphi = \pi / 2$$

ومنه:

$$t = (\pi / 2\omega) - (\varphi / \omega)$$

وتدرس الحركة في المجال الزمني بين:

$$t_1 = (\frac{\pi}{2\omega} - \frac{\varphi}{\omega}) \quad \text{و} \quad t_2 = (\frac{\pi}{2\omega} - \frac{\varphi}{\omega} + T) = (\frac{5\pi}{2\omega} - \frac{\varphi}{\omega})$$

وتنظيم الجدول التالي الذي يبين فيه تغيرات كل من A , V , x ، يساعد على دراسة الحركة.

	$\frac{p}{2w}-\frac{j}{w}$	$\frac{p}{2w}-\frac{j}{w}+\frac{T}{4}$	$\frac{p}{2w}-\frac{j}{w}+\frac{T}{2}$	$\frac{p}{2w}-\frac{j}{w}+\frac{3T}{4}$	$\frac{p}{2w}-\frac{j}{w}+T$
x	0	-a	0	+a	0
$V = \dot{x}$	-$a\ \omega$ -	0 +	+$a\ \omega$ +	0 -	-$a\ \omega$
$A = \ddot{x}$	0 +	+$a\ \omega^2$ +	0 -	-$a\ \omega^2$ -	0
$V \times A$ $\dot{x} \times \ddot{x}$	- حركة عكسية متباطئة	+ حركة مباشرة متسارعة	- حركة مباشرة متباطئة	+ حركةعكسية متسارعة	

في اللحظة $(t = \frac{p}{2w} - \frac{j}{w})$ يكون المتحرك في O ، وسرعته سالبة قيمتها $a.\omega$، وتسارعه معدوم.

في الفترة بين $(t = \frac{p}{2w} - \frac{j}{w})$ و $(t = \frac{p}{2w} - \frac{j}{w} + \frac{T}{4})$، يتجه المتحرك M نحو M_1 نحو اليسار بحركة عكسية، ويؤثر عليه تسارع موجب، وتكون الحركة عكسية متباطئة.

في اللحظة $(t = \frac{p}{2w} - \frac{j}{w} + \frac{T}{4})$ يصل المتحرك M إلى M_1 ، وتنعدم السرعة، ويكون التسارع أعظمياً موجباً قيمته $a.\omega^2$.

في الفترة بين $(t = \frac{p}{2w} - \frac{j}{w} + \frac{T}{4})$ و $(t = \frac{p}{2w} - \frac{j}{w} + \frac{T}{2})$ يعود المتحرك أدراجه إلى O ، وتصبح سرعته موجبة، ويتناقص تسارعه الموجب بالقيمة المطلقة، وتكون الحركة مباشرة متسارعة.

في اللحظة $(t = \frac{p}{2w} - \frac{j}{w} + \frac{T}{2})$ يصل المتحرك M إلى مركز النوسان O ، وتكون سرعته موجبة قيمتها $a.\omega$ ، وتسارعه معدوماً.

في الفترة الواقعة بين $(t = \frac{p}{2w} - \frac{j}{w} + \frac{T}{2})$ و $(t = \frac{p}{2w} - \frac{j}{w} + \frac{3T}{4})$ يتجه المتحرك نحو M_2 ، وتكون سرعته موجبة، وتتناقص بالقيمة المطلقة في حين يصبح التسارع سالباً، وتكون الحركة مباشرة متباطئة.

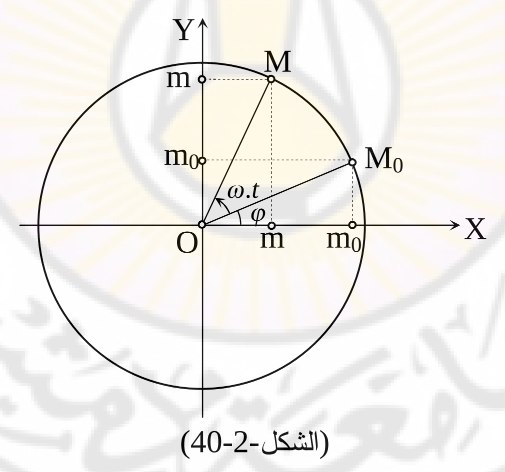
في اللحظة $(t = \frac{p}{2w} - \frac{j}{w} + \frac{3T}{4})$ يصل المتحرك M إلى M_2 ، حيث تنعدم سرعته ويكون تسارعه أعظمياً سالباً قيمته $a.\omega^2$.

في الفترة بين $(t = \frac{p}{2w} - \frac{j}{w} + \frac{3T}{4})$ و $(t = \frac{p}{2w} - \frac{j}{w} + T)$ يعود المتحرك M أدراجه، ويتجه نحو O ، وتزداد سرعته وتصبح سالبة وتكون الحركة مباشرة متباطئة.

في اللحظة $(t = \frac{p}{2w} - \frac{j}{w} + T)$ يصل المتحرك M إلى O مركز النوسان، وتكون سرعته سالبة قيمتها $a.\omega^2$ ، وتسارعه معدوماً، أي أن الحالة الحركية في هذه اللحظة تطابق حالته الحركية في اللحظة $(t = \frac{p}{2w} - \frac{j}{w})$، وهذا ما يذكرنا مجدداً بدورية هذه الحركة.

4-6- التمثيل الهندسي للحركة التوافقية البسيطة

نعد جسيم M يتحرك على دائرة موجهة نصف قطرها a بسرعة زاوية ثابتة وموجهة ω ، كما نعد M_0 مبدأ الفواصل على الدائرة التي تتحرك باتجاه الأقواس المتزايدة (الشكل-2-40).



(الشكل-2-40)

ننشئ من O جملة إحداثية متعامدة ومباشرة OXY يصنع فيها نصف القطر المتجه $\mathbf{OM_0}$ زاوية φ مع المحور OX حيث:

$$\mathbf{OX}, \mathbf{OM_0} = \varphi$$

وفي اللحظة t يكون المتحرك في M حيث:

$$\mathbf{OM_0}, \mathbf{OM} = \theta = \omega t$$

أي:

$$\mathbf{OX}, \mathbf{OM} = \omega t + \varphi$$

نسقط M و M_0 على المحور OX :

$$Om = x = a.\cos(w\,t + j) \qquad , \qquad Om_0 = x_0 = a.\cos j$$

وإذا أسقطنا M و M_0 على المحور OY كان:

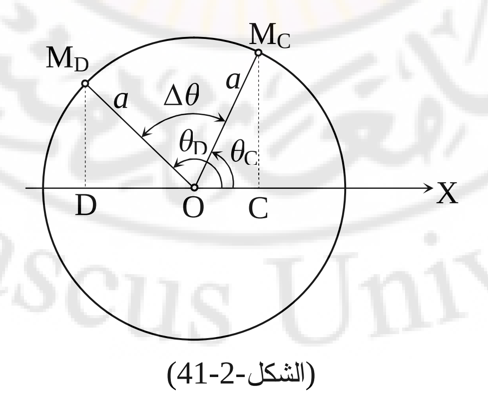
$$Om = y = a.\sin(w\,t + j) \qquad , \qquad Om_0 = y_0 = a.\sin j$$

يتضح من العلاقات أعلاه أن حركة m مسقط المتحرك M على أي قطر من أقطار الدائرة هي حركة توافقية، وأن الزاوية φ تحدد وضع المتحرك M على الدائرة في اللحظة ($t = 0$) فهي تحدد إذن وضع المتحرك m على المحور في اللحظة ($t = 0$).

نسمي طور الحركة (*Phase*) في اللحظة t العدد ($\omega t + \varphi$)، ويكون طورها في هذه اللحظة ($t = 0$) هو φ ، فالطور φ هو الزاوية بين محور الحركة التوافقية والمتجه $\mathbf{OM_0}$ ، ويمكن أن تأخذ قيما موجبة أو سالبة $(0 \le |j| \le p)$.

باختصار يمكن القول إن الحركة الاهتزازية لجسيم هي عبارة عن حركة مسقط جسيم يتحرك حركة منتظمة على محيط دائرة نصف قطرها مساو لسعة الاهتزازة على أي قطر مار من مركزها.

يستفاد من التمثيل الهندسي للحركة التوافقية في حساب زمن الحركة من نقطة معينة C إلى نقطة أخرى D على الخط المستقيم الموضحة في (الشكل-2-41)، وذلك بإيجاد المواضع الموافقة لها M_C و M_D على الدائرة، وحساب الزاوية المركزية المقابلة للقوس M_CM_D .



(الشكل-2-41)

بما أن:

$$q_C = w\,t_C + j \qquad , \qquad q_D = w\,t_D + j$$

منه:

$$\Delta q = q_{\mathrm{D}} - q_{C} = w\,(t_{\mathrm{D}} - q_{\mathrm{C}}) = w\,.\Delta t \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t = \Delta q\;/\,w$$

ويكون زمن الدورة الكاملة $(\Delta\theta = 2\pi)$ هو:

$$t = 2p\;/\,w \qquad (92\text{-}2)$$

وهو ما سبق استنتاجه.

مسألة -2-27

إذا كان مقدار أكبر سرعة لجسيم في (ح . ت . ب) هو $(V_{\max} = 100\ \ \mathrm{cm/sec})$،
فما هو:

1. مقدار السرعة عند منتصف المسافة بين المركز والموضع المتطرف.
2. مقدار السرعة بعد نصف الزمن اللازم للانتقال من المركز إلى الوضع المتطرف.

الحل:

1. إذا فرضنا أن حركة الجسيم الاهتزازية تمثل حركة مسقط النقطة C على الدائرة،

فتكون السرعة المماسية الثابتة للنقطة على الدائرة هي:

$$V_{\max} = 100\ \ \mathrm{cm/sec}$$

ومنه السرعة الزاوية:

$$\omega = V_{\max}\,/\,a = 100\,/\,a\ \ \mathrm{rad\,/sec}$$

وتحسب سرعة الجسيم في (ح . ت . ب) بدلالة الوضع من العلاقة (2-88):

$$V = \pm w\,(a^2 - x^2)^{1/2}$$

فعند $(\ x = a/2\ )$ أي منتصف المسافة بين المركز والموضع المتطرف يكون:

$$V_1 = (100/\,a)\,(a^2 - a^2\,/\,4)^{1/2}$$

ومنه السرعة في هذا الوضع:

$$V_1 = 50\sqrt{3}\ \mathrm{cm\,/\,sec}$$

2. يحسب موضع الجسيم في (ح . ت . ب) بدلالة الزمن من العلاقة:

$$x(t) = a\,.\sin w\,t$$

حيث نصف الزمن اللازم للانتقال من المركز إلى الموضع المتطرف هو:

$$t = (1/\,2)(T\,/\,4) = (1/\,2)(2p\;/\,4w) = p\;/\,4w\ \mathrm{sec}$$

بالتعويض:

$$x = a.\sin(wp\;/\,4w) = a.\sin 45 \approx 0.7\ a$$

فعند نصف الزمن اللازم للانتقال من المركز إلى الموضع المتطرف يكون:

$$V_2 = (100/a)(a^2 - 0.49a^2)^{1/2}$$

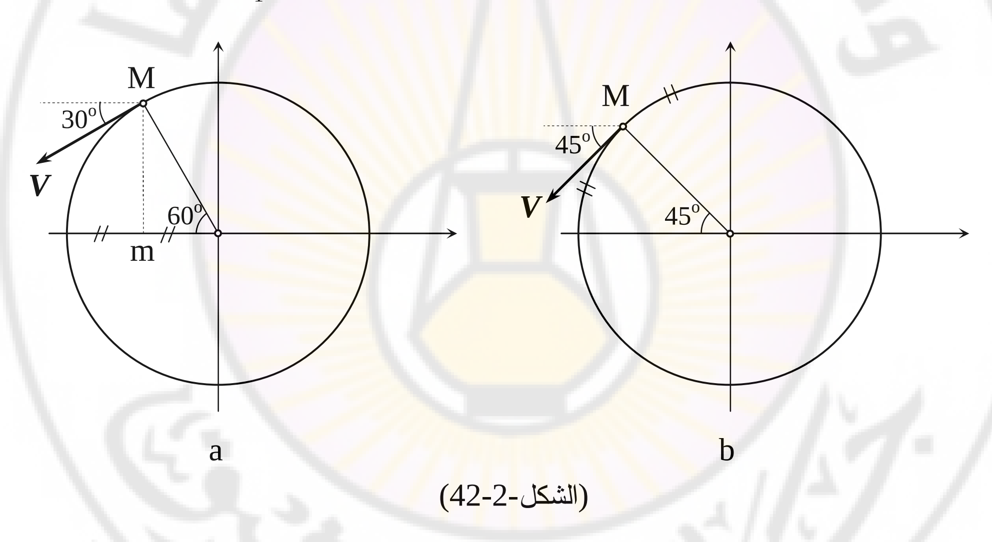
ومنه السرعة في هذا الوضع:

$$V_2 = 70.7 \text{ cm/sec}$$

طريقة أخرى

بما أن m مسقط الحركة الدائرية المنتظمة للجسيم M عند منتصف المسافة بين المركز والموضع المتطرف كما هو مبين في (الشكل-2-42a).

$$V_1 = V.\cos 30 = 100\cos 30 = 50\sqrt{3} \text{ cm/sec}$$



(الشكل-2-42)

وبعد نصف الزمن يكون الجسيم M عند منتصف القوس كما هو مبين في (الشكل-2-42b).

$$V_2 = V.\cos 45 = 100\cos 45 = 70.7 \text{ cm/sec}$$

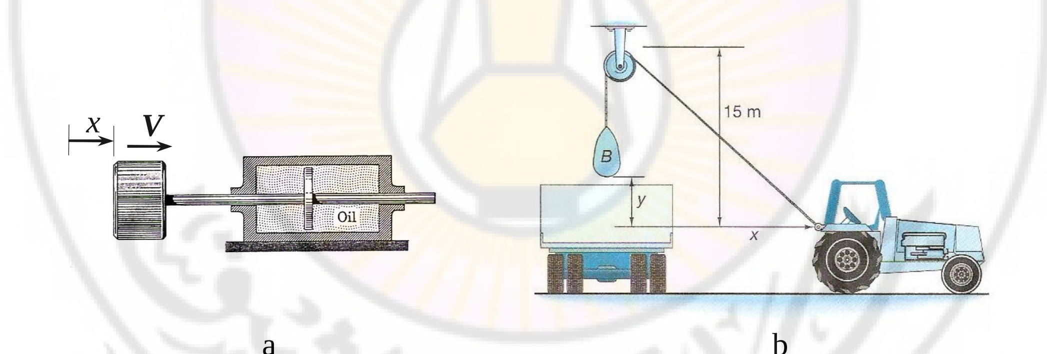
مسائل غير محلولة PROBLEMS

مسألة - 1

أوقفت الحركة الأفقية للكابس والمحور بمقاومة القرص الذي يتحرك في حوض زيتي كما هو مبين في (الشكل-2-43a)، فإذا كانت سرعة الكابس تساوي V_0 في الوضع الابتدائي A حيث ($x = 0$) و ($t = 0$)، وكان التسارع A يتناسب طرداً مع السرعة V وفق العلاقة ($A = k \cdot V$) حيث k ثابت تناسب، المطلوب ايجاد:

1. علاقة السرعة V بدلالة الزمن t ، أي $V = f(t)$.
2. علاقة الموضع x بدلالة الزمن t ، أي $x = f(t)$.
3. علاقة السرعة V بدلالة الموضع x ، أي $V = f(x)$.

الجواب: $V = V_0 - k.x \quad , \quad x = \dfrac{V_0}{k}(1 - e^{-kt}) \quad , \quad V = V_0.e^{-kt}$



(الشكل-2-43)

مسألة - 2

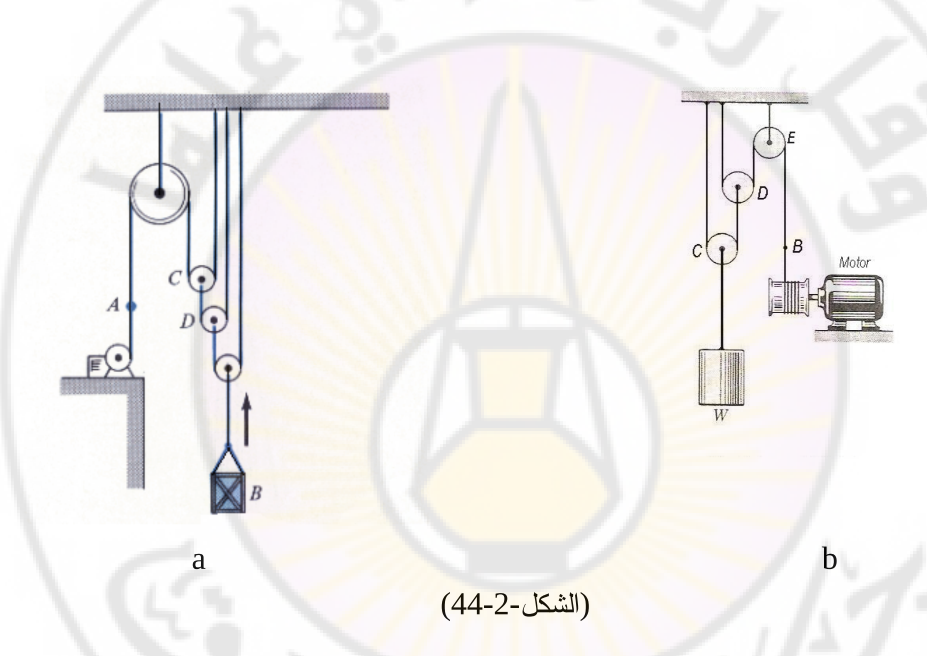
يستخدم جرار (*Tractor*) في رفع الثقل B من صندوق سيارة شاحنة، وذلك بمساعدة مجموعة الحبل والبكرة الموضحة في (الشكل-2-43b)، بفرض أن الجرار يتحرك نحو الأمام بسرعة مقدارها 0.5 m/sec ، وأن طول الحبل ($l = 30$ m)، المطلوب حساب سرعة الثقل B في اللحظة التي يكون فيها على ارتفاع ($y = 10$ m) بالنسبة لقاعدة صندوق السيارة.

الجواب: $V_A = 0.4$ m/sec - upward

مسألة - 3

يقوم محرك كهربائي ($Motor$) برفع الحمل B ، بمساعدة مجموعة من البكرات والأسلاك كما هو مبين في (الشكل-2-44a). فإذا كانت سرعة الحمل المرفوع 4 m/s باتجاه الأعلى. المطلوب حساب سرعة حركة النقطة A الواقعة على السلك الأيسر.

الجواب: $V_A = 32$ m/s - down



a b

(الشكل-2-44)

مسألة - 4

يقوم محرك كهربائي ($Motor$) برفع الحمل W ، بمساعدة مجموعة من البكرات والأسلاك كما هو مبين في (الشكل2-44b)، فإذا كانت سرعة النقطة B التي تقع على السلك الأيمن في أية لحظة من الزمن معطى بالعلاقة:

$$V_B(t) = t^2 + 2t \text{ m/sec}$$

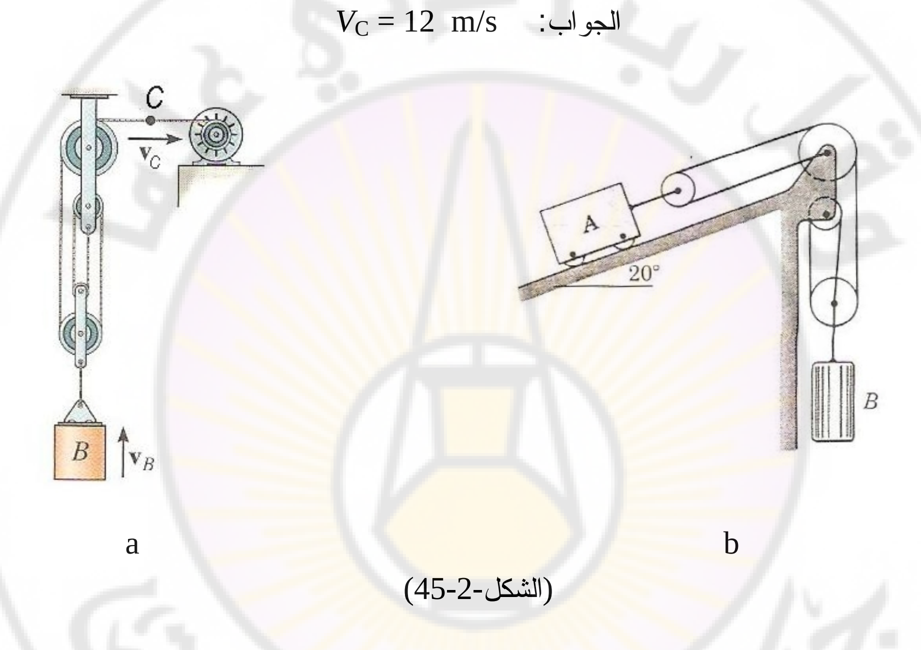
المطلوب حساب سرعة الحمل W وتسارعه.

الجواب: $V = -\frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} \text{ cm/sec}$, $A = -\frac{1}{2}(t+1) \text{ cm/sec}^2$

مسألة - 5

يقوم محرك كهربائي (*Motor*) برفع الحمل W_B ، بمساعدة مجموعة من البكرات والأسلاك كما هو مبين في (الشكل2-45a)، حيث يتحرك الثقل B للأعلى بسرعة مقدارها 4 m/sec . المطلوب حساب سرعة حركة النقطة C من السلك التابع لمجموعة الرفع.

الجواب: $V_C = 12$ m/s



a b

(الشكل-2-45)

مسألة - 6

تتحرك الاسطوانة B الموضحة في (الشكل-2-45b)، نحو الأسفل بسرعة مقدارها 0.6 m/sec ، وبتسارع مقداره 0.15 m/sec^2 وجهته نحو الأعلى. المطلوب حساب سرعة الجسم A وتسارعه.

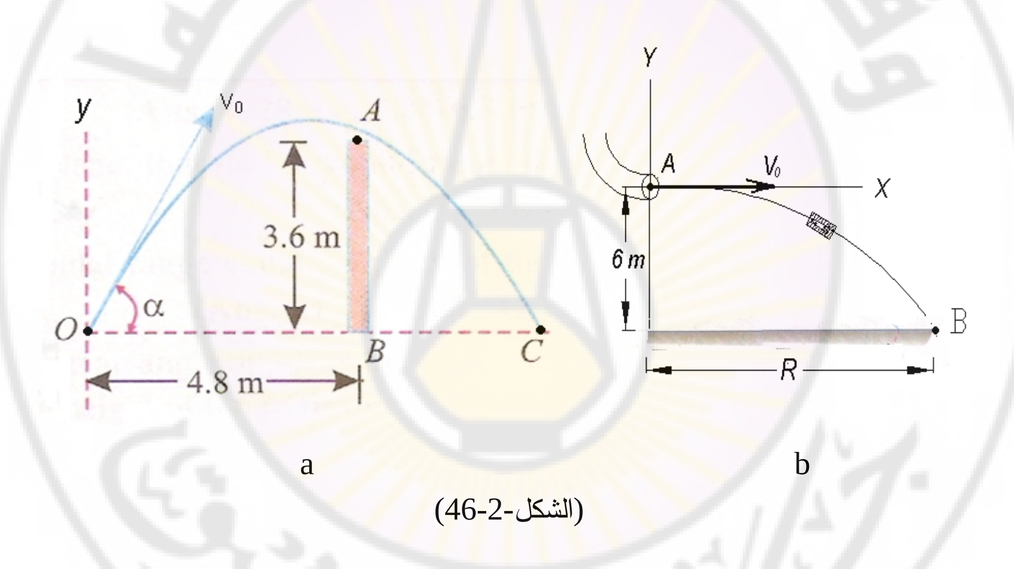
الجواب: $V_A = 0.9$ m/s - up , $A_A = 0.225$ m/s^2 - down

مسألة - 7

أطلقت قذيفة بسرعة ابتدائية V_0 ، حيث تتخطى حاجزاً ارتفاعه 3.6 m كما هو مبين في (الشكل-2-46a)، فإذا كان تسارع الجاذبية ($g = 9.8$ m/sec^2)، وكانت زاوية الإطلاق ($\alpha = 60°$)، المطلوب استنتاج المعادلة العامة للمسار $y = f(x)$ ، ثم حساب الآتي:

1. القيمة الدنيا لسرعة الإطلاق بحيث تتخطى الحاجز.
2. المدى الأفقي للقذيفة OC .

الجواب: $V_0 = 9.79$ m/sec و OC = 8.47 m



(الشكل-2-46)

مسألة - 8

يقذف أحد المنتجات من فوهة أنبوب بسرعة ابتدائية أفقية مقـــدارها 12 m/sec كما هو مبين في (الشكل-2-46b). فإذا علمت أن ارتفاع فوهة التفريغ 6 m عن ســطح الأرض، وأن تسارع الجاذبية ($g = 9.80$ m/sec^2)، المطلوب:

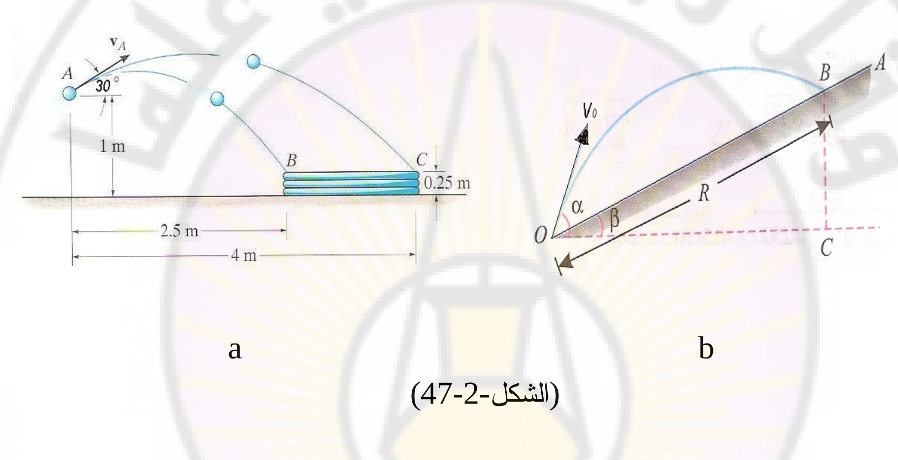
1. تحديد الموضع الذي يتجمع عنده المنتج R .
2. الزمن الذي يستغرقه المنتج للوصول إلى سطح الأرض t_B .

الجواب: $R = 13.28$ m و $t_B = 1.11$ sec

مسألة - 9

قذفت كرة من الموقع A بزاوية مقدارها ($\alpha = 30°$)، ومن ارتفاع يبلغ 1 m عن سطح الأرض كما هو مبين في (الشكل-2-47a). المطلوب حساب السرعة الابتدائية الدنيا $V_A(min)$ والقصوى $V_A(max)$ للقذف، حيث تسقط الكرة داخل الحوض.

الجواب: $V_A(min) = 4.32$ m/sec و $V_A(max) = 5.85$ m/sec



a b

(الشكل-2-47)

مسألة - 10

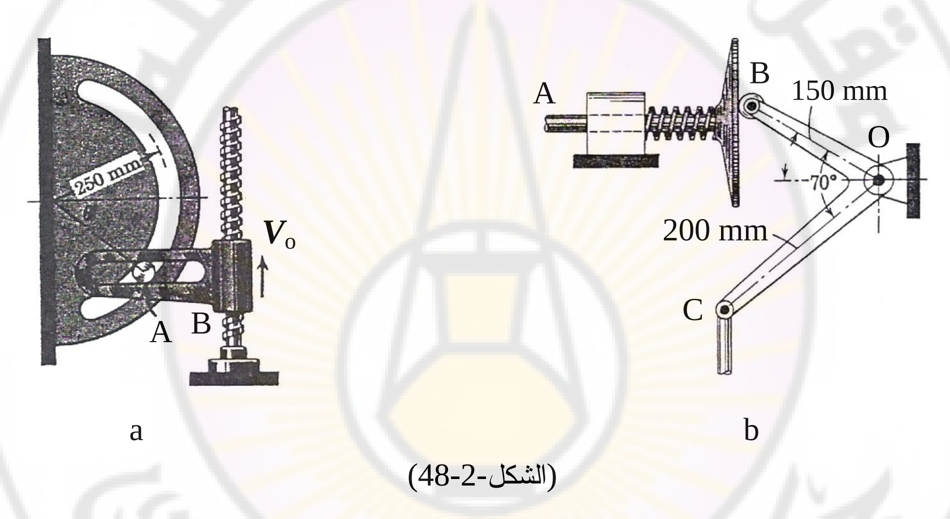
أطلقت قذيفة على سطح مائل ($\beta = 20°$)، بسرعة ابتدائية مقدارها ($V_0 = 200$ m/sec)، وبزاوية ($\alpha = 60°$) كما هو مبين في (الشكل-2-47b). المطلوب حساب الزمن الذي تستغرقه القذيفة للوصول إلى الموقع B ، ومن ثم حساب مدى القذيفة R .

الجواب: $R = 2970$ m , $t_B = 27.89$ sec

مسألة - 11

يتحكم الدليل B الذي يرتفع إلى الأعلى على لولبه كما هو مبين في (الشكل-48a-2-) بسرعة منتظمة ($V_0 = 2$ m/sec) في حركة المسمار A في الشق الدائري الثابت، وذلك خلال فترة من حركته، المطلوب حساب كلاً من مركبة التسارع المماسي والناظمي للمسمار A عندما يمر بالوضع ($\theta = 30^o$).

الجواب: $A_A^\tau = 12.32\ \text{cm/sec}^2$, $A_A^n = 21.3\ \text{m/sec}^2$



(الشكل-2-48)

مسألة - 12

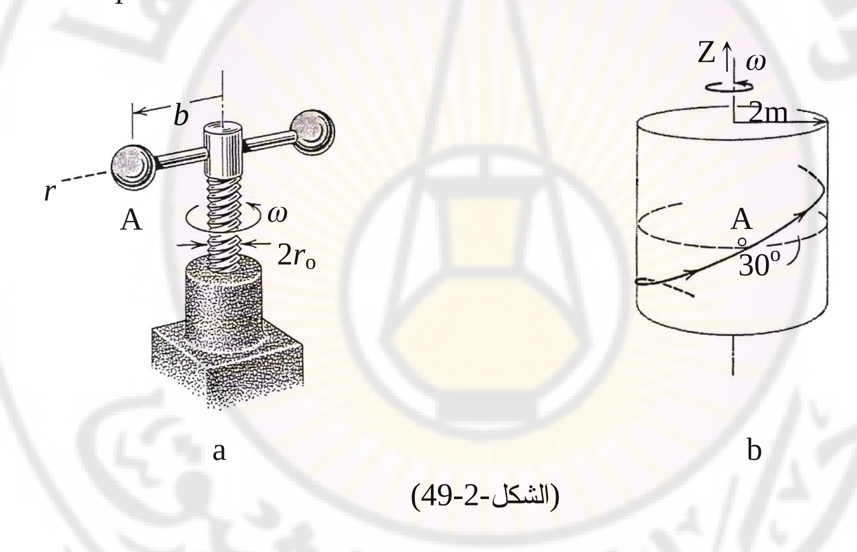
يتحكم المكبس A في حركة الرافعة المرفقية ذات 70^o ، كما هو مبين في (الشكل-48b-2)، بسرعة أفقية مقدارها 75 mm/sec ، وتتسارع بمعدل 100 mm/sec كل ثانية في الوضع ($\theta = 30^o$). المطلوب حساب التسارع الزاوي للرافعة المرفقية في هذه اللحظة.

الجواب: $e = \ddot{q} = -0.399\ \text{rad/sec}^2$

مسألة - 13

يبدأ المسمار اللولبي الآلي حركته من السكون كما هو مبين في (الشكل-2-49a)، ويعطي سرعة زاوية $(w = \dot{q})$ تزداد بصورة منتظمة مع الزمن، وفق العلاقة $(\dot{q} = k.t)$ حيث k ثابت تناسب، فإذا كانت خطوة اللولب التي تمثل تقدم اللولب في دورة واحدة هو B ، المطلوب إيجاد العلاقة للسرعة V_A والتسارع A_A لمركز الكرة A ، عندما يكون اللولب قد دار دورة كاملة من السكون.

الجواب: $A_A = b.k\sqrt{(1+16p^2)+B^2/4p^2.b^2}$, $V_A = \sqrt{\frac{k}{p}}\sqrt{B^2+4p^2.b^2}$



(الشكل-2-49)

مسألة - 14

يتحرك جسيم على لولب اسطواني كما هو مبين في (الشكل-2-49b)، وعندما يمر من النقطة A تكون قيمة التسارع الكلي $10\ m/sec^2$ ، وتزداد قيمة سرعة الجسيم على طول المسار بمعدل $8\ m/sec^2$ ، المطلوب حساب $\dot{q}, \ddot{q}, V, A_Z$ لهذا الوضع.

مسألة - 15

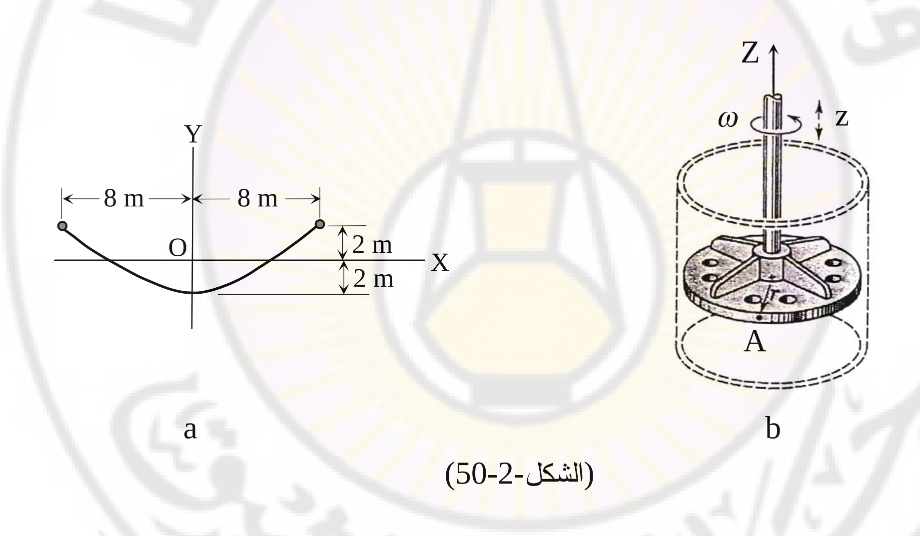
يتحرك جسيم حركة اهتزازية على المسار المبين في (الشكل-2-50a) حسب علاقة متجه الموضع:

$$\boldsymbol{r} = (8 \sin \pi t)\, \boldsymbol{i} - (2 \cos \pi t)\, \boldsymbol{j}$$

حيث r مقدرة بالمتر و t بالثانية. المطلوب:

1. أوجد سرعة وتسارع الجسيم عند الزمن ($t = 1$ sec).
2. برهن أن مسار الجسيم هو قطع مكافئ.

الجواب: $\boldsymbol{V} = -(8\pi \text{ m/sec})\, \boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{A} = (8\pi^2 \text{ m/sec}^2)\, \boldsymbol{j}$ ، $y = (x^2/32) - 1$



(الشكل-2-50)

مسألة - 16

يعطي الجزء الدوار ذو نصف القطر r في حجرة الخلط الموضحة في (الشكل-2-50b)، حركة راسية دورية وفق العلاقة ($z = z_0 . \sin 2\pi . n\ t$)، أثناء دورانه بسرعة زاوية منتظمة $(w = \dot{q})$، فإذا كان التردد n ثابت للتذبذب الرأسي، المطلوب ايجاد العلاقة للقيمة العظمى لتسارع النقطة المحيطية A .

الجواب: $A_{max} = \sqrt{r^2 . w^2 + 16 p^4 . n^4 . z_0^2}$

الفصل الثالث

حركة الجسم الصلب *Kinematics of a Rigid Body*

الحركة الانسحابية *Translation Motion* - الحركة الدورانية *Rotational Motion*

1- حركة الجسم الصلب *Kinematics of a Rigid Body*

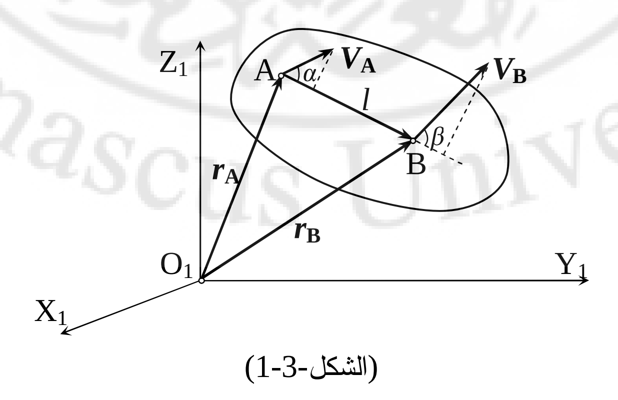
الجملة المتماسكة هي مجموعة من الجسيمات المادية تبقى أبعادها النسبية ثابتة عندما تتحرك، ونطلق في أبحاث الميكانيك على الجملة المتماسكة اسم الجسم الصلب، وينتج من ذلك فرضية الصلابة التامة للجسم الصلب المعتمدة كأساس في دراسة الحركة، والتي تنص على أن المسافة الفاصلة بين جسيمين لا على التعيين من هذا الجسم تبقى ثابتة طيلة مدة الحركة، وتكون المسائل الخاصة بحركة الجسم الصلب عندئذ على نوعين:

- تحديد نوعية الحركة، ومن ثم تعيين مميزات حركة الجسم ككل.
- تعيين خصائص حركة كل جسيم، وكل نقطة تمثل جسيم من جسيمات الجسم من مسار وسرعة خطية وتسارع خطي بدلالة الزمن.

ويتصف الجسم الصلب بخاصة أساسية تنص بما يلي:

إن مسقطي سرعتي جسيمين A و B من جسيمات الجسم الصلب على المستقيم AB الواصل بينها متساويان.

نعد بالفعل جسماً يتحرك بدلالة جملة محاور إحداثية $T(O_1X_1Y_1Z_1)$ كما هو مبين في (الشكل-3-1)، ولتكن l المسافة بين الجسيمين A و B التي تبقى ثابتة، وذلك من تعريف الجسم الصلب، ويمكن أن نعين موضعي الجسيمين A و B بمتجهي الموضع $\boldsymbol{r_A}$ و $\boldsymbol{r_B}$ على الترتيب.



(الشكل-3-1)

من الشكل نكتب:

$$\boldsymbol{r}_{\mathbf{B}} - \boldsymbol{r}_{\mathbf{A}} = \mathbf{AB} \qquad (1\text{-}3)$$

ولكن:

$$(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{AB}.\mathbf{AB} = l^2$$

بالاشتقاق بدلالة الزمن:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{AB})^2 = 2\mathbf{AB}\frac{d}{dt}(\mathbf{AB}) = 0 \qquad (2\text{-}3)$$

لكن:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{AB}) = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_{\mathbf{B}} - \boldsymbol{r}_{\mathbf{A}}) = \boldsymbol{V}_{\mathbf{B}} - \boldsymbol{V}_{\mathbf{A}}$$

بالتبديل في العلاقة (3-2) نحصل على:

$$\mathbf{AB}\ (\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}} - \boldsymbol{V}_{\mathbf{A}}) = 0$$

منه:

$$\mathbf{AB}\,.\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}} = \mathbf{AB}\,.\boldsymbol{V}_{\mathbf{A}}$$

ومن تعريف الجداء العددي:

$$l\,.V_{\mathrm{B}}.\cos b = l\,.V_{\mathrm{A}}.\cos a$$

ومنه:

$$V_{\mathrm{B}}.\cos b = V_{\mathrm{A}}.\cos a \qquad (3\text{-}3)$$

يكون مسقط $\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}}$ على AB يساوي مسقط $\boldsymbol{V}_{\mathbf{A}}$ على AB .

تكفل هذه الخاصة سهولة تعيين سرعة جسيم من جسيمات الجسم إذا علم اتجاه حركة هذا الجسيم وسرعة أي جسيم آخر من جسيمات الجسم نفسه.

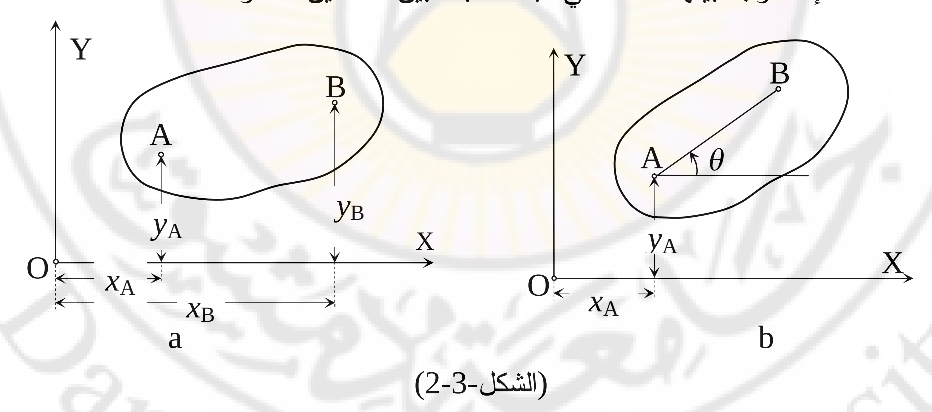
2- درجات الطلاقة للجسم الصلب ***Degrees of Freedom of a Rigid Body***

كما ذكرنا في بحث حركة الجسيم المادي أن عدد الإحداثيات المستقلة عن بعضها بعضاً واللازمة لتحديد وضع نظام ميكانيكي في أي لحظة يساوي عدد درجات الطلاقة لهذا النظام، ويساوي عددها العدد الكلي للإحداثيات مطروحاً منه عدد العلاقات الهندسية التي تربط بينها.

كما نعلم ان الجسم الصلب عندما يتحرك بطلاقة في الفراغ بالنسبة إلى محاور ثابتة، فإن وضعه يتعين بشكل كامل بوضع ثلاثة جسيمات منه لا تقع على استقامة واحدة، إذ إن وضع أي جسيم إضافي من الجسم يحدد بالاستناد إلى أن بعده عن الجسيمات الثلاثة ثابت لا يتغير كيفما تحرك الجسم، إضافة الى كون الأبعاد بين الجسيمات ثابتة أيضاً.

يتضح من ذلك أن الإحداثيات التسع اللازمة لتعيين وضع الجسيمات الثلاثة من الجسم ليست مستقلة عن بعضها بعضاً، إذ إنها ترتبط فيما بينها بثلاث علاقات للأبعاد الثابتة بين هذه الجسيمات، وبالتالي فإنه يبقى ست قيم مستقلة تمثل الإحداثيات المكانية للجسم، أي أن للجسم الصلب الطليق في الفراغ ست درجات طلاقة.

لكن إذا تحرك جسم صلب بحركة مستوية طليقة، فإن وضعه يتعين بالنسبة إلى المستوي الثابت بإحداثيات جسيمين منه A و B كما هو مبين في (الشكل-3-2a)، لأن حركة الجسم في هذه الحالة هي دوماً موازية للمستوي الثابت OXY . يتحدد وضع الجسيم A بالإحداثيتين x_A و y_A ، بينما يتحدد وضع الجسيم B بالإحداثيتين x_B و y_B ، وبالتالي فإن وضع الجسم يعين في المستوي بأربع إحداثيات، لكن هذه الإحداثيات ليست مستقلة تماماً إنما توجد بينها علاقة هي البعد الثابت بين النقطتين A و B .



(الشكل-3-2)

كما يمكن تحديد وضع الجسم في المستوي بـــ x_A و y_A إحداثيتي الجسيم A ، والزاوية θ ميل الخط AB على المحور OX ، حيث تكون الإحداثيات θ و x_A و y_A مستقلة تماماً كما هو مبين في (الشكل-3-2b).

ينتج من ذلك أن عدد الإحداثيات المستقلة اللازمة والكافية لتوصيف وضع جسم صلب، في أي لحظة، يتحرك حركة مستوية هو ثلاث إحداثيات، وبالتالي فإن للجسم في هذه الحالة ثلاث درجات طلاقة.

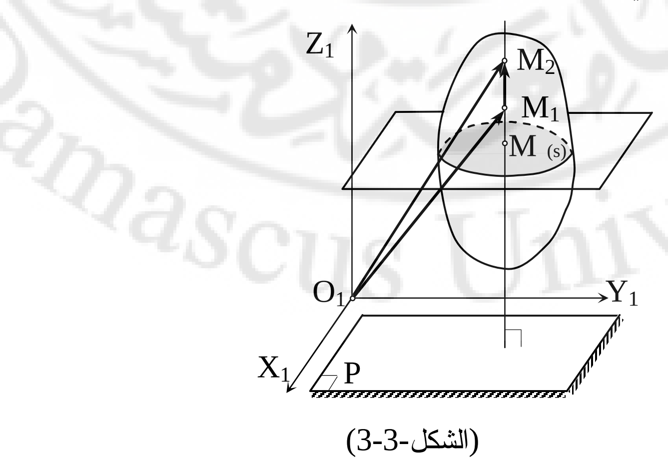
3- الحركة المستوية للجسم الصلب *Plane Motion of a Rigid Body*

ستقتصر دراسة الحركة على الأجسام الصلبة المتناظرة ذات الحركة المستوية ثنائية الأبعاد، أي: الحركة التي تكون فيها المسافة بين كل جسيم من الجسم ومستوٍ ثابت مفروض ثابتة لا تتغير، وبتعبير آخر الحركة المستوية هي الحركة التي ينتقل فيها كل جسيم في الجسم على مسار يوازي مستوياً ثابتاً، بالتالي تتحرك جسيمات الجسم كافة في مستويات موازية لمستوى إسناد ثابت يدعى مستوى الحركة.

وبما أن حركة معظم الأجسام هي من هذا النوع، فيمكن لهذه الحركة أن تكون انسحابية، أو دورانية حول محور ثابت مار من الجسم أو مستوية عامة، والتي يكفي لدراستها دراسة حركة المقاطع العرضية (*Plane Slabs*) المستوية لها، ويتحرك كثير من أجزاء الآلات والأجهزة الميكانيكية حركة مستوية عامة، كالعجلة التي تتدحرج على طريق مستقيم، وذراع التوصيل في العمود المرفقي.

أما دراسة حركة الأجسام الصلبة الفراغية ذات ثلاثة أبعاد وغير المتناظرة، وبالأصح الشكل الأعم لحركة الأجسام الصلبة في الفراغ بدلالة مجموعة الإحداثيات الثلاثية القائمة، فسيتم مناقشتها في الفصل الخامس، مع الإشارة إلى أن أغلب الأسس والمفاهيم المعتمدة في دراسة الحركة المستوية؛ هي ذات فائدة كبيرة في تحليل أنماط الحركة الفراغية.

نعد جسماً صلباً يتحرك حركة مستوية بدلالة جملة إحداثية ثابتة $T(O_1X_1Y_1Z_1)$ ، حيث يوازي مستويها $O_1X_1Y_1$ مستوياً ثابتاً مفروضاً P ، ويعامد محورها O_1Z_1 هذا المستوي كما هو مبين في (الشكل-3-3-3).



(الشكل-3-3-3)

نأخذ من الجسم مقطعاً عرضياً S حيث يوازي المستوي $O_1X_1Y_1$ والمستوي P ، ونختار نقطة M في المقطع العرضاني لتمثل جسيم منه، التي يجب أن تتحرك على مسار C يوازي المستوي $O_1X_1Y_1$ ، ويبقى راقمها z ثابتاً في أثناء الحركة، وتكون سرعتها المماسة للمسار موازية للمستوي $O_1X_1Y_1$ لأن $(\dot{z} = 0)$.

نرسم من M مستقيماً يعامد المستوي $O_1X_1Y_1$ ، ونعد نقطتين M_1 و M_2 من هذا المستقيم، ويمكن أن نكتب:

$$\mathbf{O_1M_2} = \mathbf{O_1M_1} + \mathbf{M_1M_2} \qquad (4\text{-}3)$$

ففي أثناء الحركة المستوية يبقى المتجه $\mathbf{M_1M_2}$ مسايراً لنفسه خلال الحركة، أي عمودي على المستوي المفروض، وباشتقاق العلاقة (3-4) بدلالة الزمن t آخذين بعين الاعتبار أن مشتق المتجه الثابت $\mathbf{M_1M_2}$ معدوم، ومنه نحصل على:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}_1} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{M}_2} \qquad (5\text{-}3)$$

كذلك لو اشتقينا العلاقة (3-5) بدلالة الزمن لكان:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{M}_1} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{M}_2} \qquad (6\text{-}3)$$

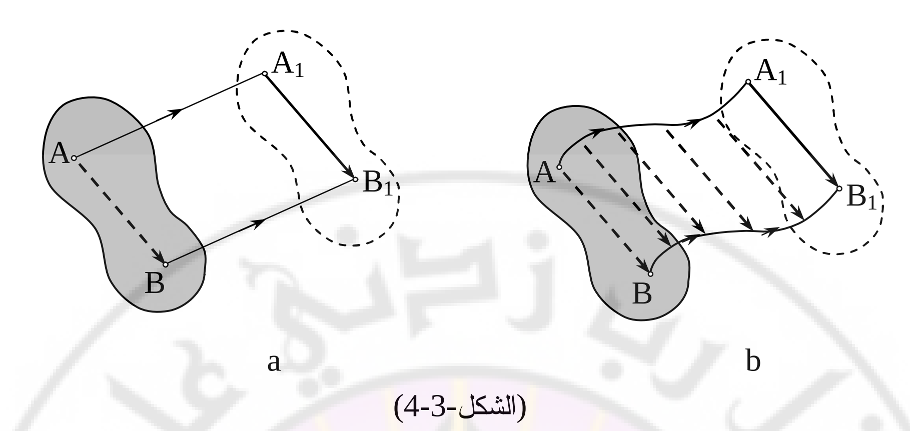
بالتالي تكون سرع النقاط أو الجسيمات M وتسارعاتها الواقعة على مستقيم واحد يعامد المستوي P متسايرة، وتتحرك بطريقة متماثلة، حيث ترسم مسارات تقع كلها في مستويات متوازية، إذا وضعت فوق بعضها انطبقت على بعضها فهي مسارات متماثلة.

وعليه يكفي لدراسة الحركة المستوية لجسم صلب دراسة حركة المقطع العرضاني S لهذا الجسم في مستوي $O_1X_1Y_1$ يوازي المستوي الثابت، وسوف نمثل فيما بعد المستوي $O_1X_1Y_1$ منطبقاً على مستوي الرسم، وبدلاً من الجسم كله سنرسم مقطعه فحسب، وتؤول دراسة حركة الجسم الصلب عندها إلى دراسة مسارات جسيمات المقطع العرضاني المذكور وسرعه وتسارعاته.

4- الحركة الانسحابية للجسم الصلب *Translation Motion of a Rigid Body*

4-1- معادلات الحركة الانسحابية

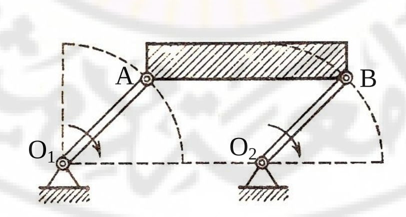
يقال عن حركة جسم أنها انسحابية إذا بقي كل متجه **AB** يصل بين جسيمين من الجسم الصلب موازياً لنفسه، ومحافظاً على الاتجاه نفسه طوال مدة الحركة، بالتالي تتحرك جميع الجسيمات التي يتشكل منها الجسم الصلب في مسارات متوازية.



(الشكل-3-4)

فإذا كانت هذه المسارات خطوطاً مستقيمة فيقال عن الحركة إنها انسحابية مستقيمة (*Rectilinear Translation*) كما هو مبين في (الشكل-3-4a)، وكمثال حركة سيارة على طريق أفقي مستقيم هي حركة انسحابية حيث ترسم نقاطها مسارات مستقيمة.

أما إذا كانت المسارات منحنية فيقال عن هذه الحركة أنها انسحابية منحنية (*Curvilinear Translation*) كما هو مبين في (الشكل-3-4b)، وكمثال حركة الوصلة AB الموضحة في (الشكل-3-5)، فنتيجة دوران المرفقين O_1A و O_2B بسرعة زاوية واحدة، وأن ($O_1A = O_2B$)، عندئذ تتحرك A على دائرة مركزها O_1 ، وتتحرك B على دائرة مركزها O_2 ، ومنه تتحرك جسيمات الوصلة AB عند ذلك على دوائر مراكزها تقع على المستقيم O_1O_2 ، حيث تبقى الوصلة أي المتجه **AB** مسايرة لنفسها، وبالتالي تتحرك الوصلة عند ذلك حركة انسحابية.



(الشكل-3-5)

ومنه يتصف الجسم في حركته الانسحابية بأن جسيماته ترسم مسارات واحدة، ويتحقق ذلك بسبب بقاء المتجه **AB** ثابتاً خلال الحركة، ونحصل على مسار الجسيم B من مسار الجسيم A عن طريق انتقالات متوازية ومساوية للمتجه **AB** ، وبالتالي يكون مسار الجسيمين A و B خطين متشابهين تماماً حيث ينطبقان عند وضعهما على بعضهما بعضاً.

بالتالي تتطلب دراسة حركة الجسم في حركته الانسحابية معرفة معادلة حركته بدلالة الزمن، أي معادلة انتقاله، التي تحدد بموقع جسيم من جسيماته في كل لحظة زمنية بدلالة جملة إحداثية مختارة، وبحسب شكل المسار تحدد معادلة حركة هذا الجسيم، والتي يمكن إيجادها بتطبيق إحدى الطرق الثلاث التي تم ذكرها عند دراسة حركة الجسيم، فإذا كانت حركة الجسيم مستوية والمسار منحنياً فمعادلات حركته بطريقة الإحداثيات هي:

$$x = f_1(t) \qquad , \qquad y = f_2(t) \tag{7-3}$$

وإذا كانت حركة الجسيم مستوية والمسار مستقيماً فمعادلة حركته بطريقة الإحداثيات هي:

$$x = f_1(t)$$

تحدد هذه المعادلات موضع الجسم في أي لحظة زمنية، لذا تدعى بمعادلات الحركة الانسحابية للجسم الصلب، والمميزات الحركية الأساسية لهذه الحركة هما السرعة الخطية والتسارع الخطي.

4-2- السرعة الخطية والتسارع الخطي

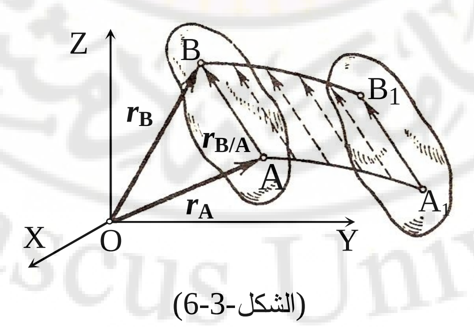
Linear Velocity and Linear Acceleration

نفترض جسماً صلباً يتحرك حركة انسحابية بالنسبة لمجموعة الإحداثيات $T(O_1X_1Y_1Z_1)$ كما هو مبين في (الشكل-3-6)، ففي اللحظة t يحدد وضع الجسيمين الاختياريين A و B من الجسم بنصفي القطرين الموجهين:

$$\boldsymbol{r}_\mathbf{A} = \mathbf{OA} \qquad , \qquad \boldsymbol{r}_\mathbf{B} = \mathbf{OB} \tag{8-3}$$

نمدد المتجه الواصل **AB** بين هذين الجسيمين، ومنه نحصل على:

$$\boldsymbol{r}_\mathbf{B} = \boldsymbol{r}_\mathbf{A} + \mathbf{AB} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{r}_\mathbf{B} = \boldsymbol{r}_\mathbf{A} + \boldsymbol{r}_\mathbf{B/A} \tag{9-3}$$



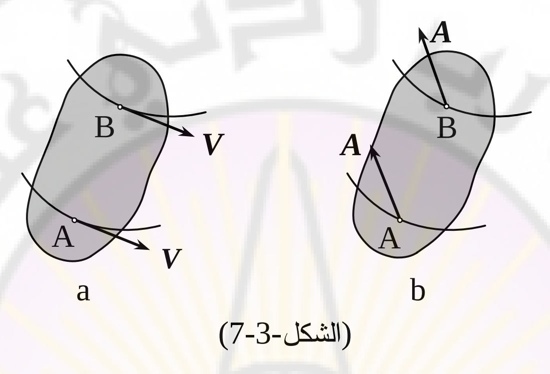
(الشكل-3-6)

بالتالي يعين وضع الجسم بالمتجه **AB** الذي يدعى بمتجه موضع الجسيم B بالنسبة للجسيم A ، أي $\boldsymbol{r}_\mathbf{B/A}$ ، حيث يبقى طوله واتجاهه في أثناء الحركة الانسحابية ثابتاً، أي مسايراً لوضعه في اللحظة t_1 .

لايجاد سرعتي الجسيمين A و B نشتق العلاقة (3-9) بدلالة الزمن آخذين في الحسبان أن مشتق المتجه الثابت **AB** يساوي الصفر، ومنه:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{B}} = \dot{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{A}} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{V}_{\mathbf{B}} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{A}} \tag{10-3}$$

أي أن سرعتي الجسيمين A و B متساويتان في المقدار والاتجاه في كل لحظة زمنية t ، كما هو مبين في (الشكل-3-7a).



(الشكل-3-7)

وبالاشتقاق مرة ثانية ينتج:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{B}} = \ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{A}} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{A}_{\mathbf{B}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{A}} \tag{11-3}$$

أي أن تسارعي الجسيمين A و B متساويان في المقدار والاتجاه في كل لحظة زمنية t ، كما هو مبين في (الشكل-3-7b).

وبما أن اختيار الجسيمين A و B تم لا على التعيين، فينتج أنه في الحركة الانسحابية لجسم صلب تكون لجميع جسيماته المادية السرعة الخطية نفسها، والتسارع الخطي نفسه.

في حالة الحركة الانسحابية المنحنية فإن اتجاه متجهي السرعة والتسارع وقيمتهما سيتغيران في كل لحظة زمنية، أما في حالة الحركة الانسحابية المستقيمة، فإن كل الجسيمات المادية في الجسم الصلب تتحرك على طول خطوط مستقيمة متوازية، ويحافظ بالتالي كل من متجهي السرعة والتسارع على اتجاهه الثابت طول مدة الحركة الكلية.

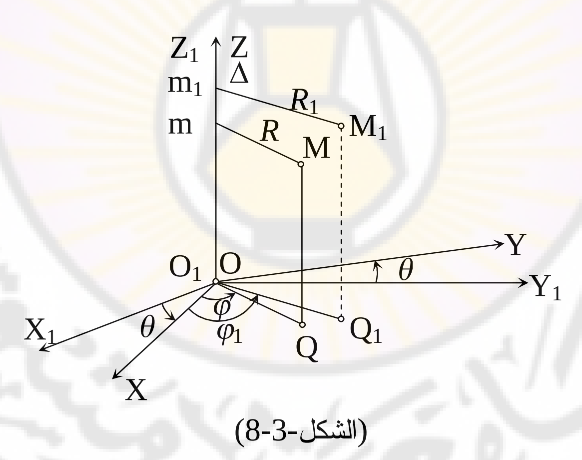
يتضح من كل ذلك أن دراسة الحركة الانسحابية للجسم الصلب تؤول إلى دراسة حركة جسيم مادي يعود إلى هذا الجسم، حيث تعطى معادلة حركته بإعطاء معادلات حركة هذا الجسيم بالطريقة التي ذكرناها سابقاً، وتدعى السرعة المشتركة بسرعة الانسحاب أو سرعة الجسم الانسحابي $\boldsymbol{V}_{Trans.}$ ، كما يدعى التسارع المشترك بتسارع الانسحاب أو تسارع الجسم الانسحابي $\boldsymbol{A}_{Trans.}$ ، ويجدر بالذكر أن مفهوم سرعة الجسم وتسارعه يكون لها معنى فقط من أجل الحركة الانسحابية، أما في الحالات الأخرى فإن جسيمات الجسم تتحرك بسرعات وتسارعات مختلفة، بالتالي يفقد المفهوم السابق معناه.

5- الحركة الدورانية للجسم الصلب *Rotational Motion of a Rigid Body*

1-5 معادلة الحركة الدورانية *Equation of Rotational Motion*

يقال عن حركة جسم إنها دورانية إذا بقي أي جسيمين A و B من جسيمات الجسم ثابتين خلال الحركة، ويسمى المستقيم AB المار بالجسيمين الثابتين بمحور الدوران ويرمز له بـــ Δ ، ولما كانت الأبعاد النسبية بين جسيمات الجسم الصلب ثابتة، وجب لذلك أن تبقى كل جسيمات محور الدوران ثابتة عند الحركة الدورانية، وترسم جسيمات الجسم الباقية دوائر تكون مستوياتها عمودية على محور الدوران وتقع مراكزها على هذا المحور.

لتعيين موضع الجسم الدائر بدلالة ثلاثية ثابتة $T_1(O_1X_1Y_1Z_1)$ ، نمرر جملة إحداثية متحركة $T(OXYZ)$ مقيدة بالجسم، نختار مبدأها O منطبقاً على O_1 ، ومحورها OZ منطبقاً على محور الدوران Δ المنطبق بدوره على O_1Z_1 ، كما هومبين في (الشكل3-8).



(الشكل-3-8)

ولتحديد موضع الثلاثية المتحركة T بدلالة الثلاثية الثابتة T_1 ، يكفي تعيين الزاوية θ بين المستوي الثابت $O_1X_1Y_1$ والمستوي المتحرك OXY ، أي بين المحور O_1X_1 والمحور OX ، أي:

$$q = O_1X_1{}^\wedge OX$$

تدعى θ بزاوية دوران الجسم (*Angular Coordinate*) التي تم ذكرها بالحركة الدائرية لجسيم مادي، منه يمكن أن يدور الجسم حول محور ولا يقع أي جسيم من جسيماته على هذا المحور، كدوران شخص جالس على أرجوحة دوارة في مدينة الملاهي.

بالتالي لمعرفة موضع الجسم في أي لحظة زمنية لا بد من معرفة العلاقة التي تربط بين الزاوية θ التي تتغير مع الحركة، أي مع الزمن t ، منه:

$$\theta = f(t) \tag{12-3}$$

تحدد هذه المعادلة موضع الجسم في أي لحظة زمنية، لذا تدعى بمعادلة الحركة الدورانية للجسم الصلب حول محور ثابت، والمميزات الحركية الأساسية لهذه الحركة هي: سرعته الزاوية وتسارعه الزاوي.

5-2- السرعة الزاوية والتسارع الزاوي

Angular Velocity and Angular Acceleration

بالتعريف تحدد السرعة الزاوية تحولات زاوية الدوران θ بدلالة الزمن، ويرمز لها بـــ ω :

$$\omega = \dot{\theta} \tag{13-3}$$

لقد تم ذكر السرعة الزاوية بالحركة الدائرية لجسيم مادي،على أنها تقاس بـــ $(\mathrm{rad/sec} \equiv 1/\mathrm{sec} \equiv \mathrm{sec}^{-1})$، وتمثل القيمة العددية لمتجه السرعة الزاوية $\boldsymbol{\Omega}$ ، الذي ينطبق على محور الدوران Δ المنطبق بدوره على المحور الإحداثي O_1Z_1 ، ويتجه $\boldsymbol{\Omega}$ بشكل يدور حوله الجسم في الجهة المباشرة، أي وفق حركة اليد اليمنى كما هو مبين في (الشكل-3-9)، بحيث:

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega . \boldsymbol{k_1} \tag{14-3}$$

وبالتعريف يحدد التسارع الزاوي تحولات السرعة الزاوية ω بدلالة الزمن، ويرمز له بـــ ε :

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\theta} \tag{15-3}$$

لقد تم ذكر التسارع الزاوي بالحركة الدائرية لجسيم مادي، على أنه يقاس بـــ $(\mathrm{rad/sec^2} \equiv 1/\mathrm{sec^2} \equiv \mathrm{sec}^{-2})$، ويمثل القيمة العددية لمتجه التسارع الزاوي $\boldsymbol{E}$ ، وهو بالتعريف مشتق متجه السرعة الزاوية $\boldsymbol{\Omega}$ حيث:

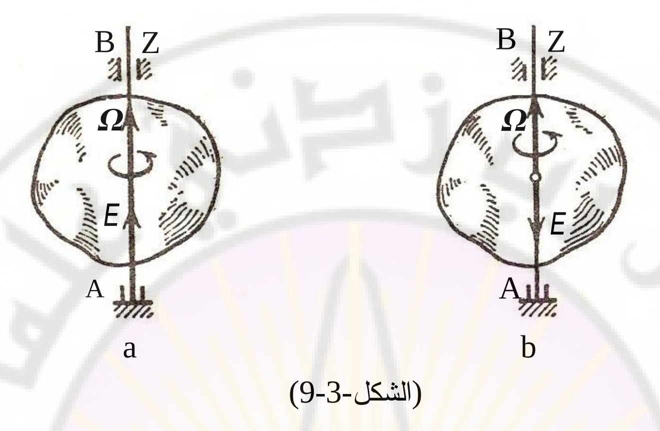
$$\boldsymbol{E} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{\Omega} \tag{16-3}$$

وبما أن منحى $\boldsymbol{\Omega}$ ثابت، وعليه يشترك $\boldsymbol{E}$ بالمنحى مع $\boldsymbol{\Omega}$ ويكون:

$$\boldsymbol{E} = \varepsilon . \boldsymbol{k_1} \tag{17-3}$$

من العلاقة (3-14) والمعادلة (3-17) يمكن أن نكتب:

$$E = \frac{e}{w}\boldsymbol{\Omega} \qquad (18\text{-}3)$$



(الشكل-3-9)

فعندما ينطبق اتجاه E على اتجاه $\boldsymbol{\Omega}$ ، يكون للمقدارين ω و ε إشارة واحدة، كما هو مبين في (الشكل-3-9a)، ويدور الجسم دوراناً متسارعاً، والعكس بالعكس يكون متباطئاً عندما يكون للمقدارين ω و ε إشارتان مختلفتان، كما هو مبين في (الشكل-3-9b).

3-5- السرعة الخطية لجسيم من جسيمات الجسم الدائر

بعد أن عينا السرعة الزاوية والتسارع الزاوي، مميزات حركة الجسم الدائر ككل، نعين السرعة الخطية والتسارع الخطي، مميزات حركة جسيماته على انفراد.

إذا فرضنا أن النقطة M تمثل جسيم في الجسم الصلب، ثابتة في الجملة المتحركة T ومتحركة بالنسبة للجملة الثابتة T_1 ، وتبعد بمسافة R عن محور الدوران Δ الموضح في (الشكل-3-8)، ففي الحركة الدورانية المستوية يبقى بعد النقطة M عن المستوي الثابت $O_1X_1Y_1$ ثابتاً، أي ($z = z_1 = \text{const}$) في حين يدور Q ، مسقط النقطة M على هذا المستوي حول O_1 ، وتحدد الإحداثيات x_1 , y_1 , z_1 وضع النقطة M بدلالة الجملة الثابتة T_1 :

$$x_1 = O_1Q.\cos(q + j) \quad , \quad y_1 = O_1Q.\sin(q + j) \quad , \quad z_1 = QM$$

حيث O_1Q طول ثابت لا يتحول مع الزمن، ويساوي مسقط O_1M على المستوي $O_1X_1Y_1$ ، و φ زاوية ثابتة أيضاً لا تتحول مع الزمن، وتساوي:

$$j = O_1X\,\hat{}\,O_1Q \qquad (19\text{-}3)$$

وبالتالي يمكن أن نكتب:

$$x_1 = f(q) \quad , \quad y_1 = f(q) \quad , \quad z_1 = \text{const} \qquad (20\text{-}3)$$

تمثل هذه العلاقات معادلات حركة، أو إحداثيات الجسيم M بدلالة الجملة الثابتة T_1 .

ففي أثناء الحركة الدورانية يرسم المسقط Q دائرة في المستوي $O_1X_1Y_1$ مركزها O_1 ونصف قطرها ($O_1Q = R$)، وبالمقابل ترسم النقطة M دائرة توازي المستوي $O_1X_1Y_1$ مركزها m يقع على محور الدوران، ونصف قطرها ($mM = O_1Q = R$)، وبالتالي سرعة Q تساير سرعة النقطة M ، ويعود ذلك إلى ثبات المتجه **QM** بالمنحنى والطول والاتجاه، ومتجه سرعة Q في حركتها الدائرية حول O_1 تمس الدائرة في Q وتتجه في اتجاه الحركة وقيمتها العددية:

$$V_Q = V_M = O_1Q\frac{d}{dt}(q + j) = R.\dot{q} = R.w \qquad (21\text{-}3)$$

وإذا فرضنا نقطة أخرى M_1 مسقطها Q_1 على $O_1X_1Y_1$ ، ويدور المسقط Q_1 على دائرة مركزها O_1 ونصف قطرها ($O_1Q_1 = R_1$)، وتكون القيمة العددية لسرعتها:

$$V_{Q_1} = V_{M_1} = O_1Q_1\frac{d}{dt}(q + j_1) = R_1.\dot{q} = R_1.w$$

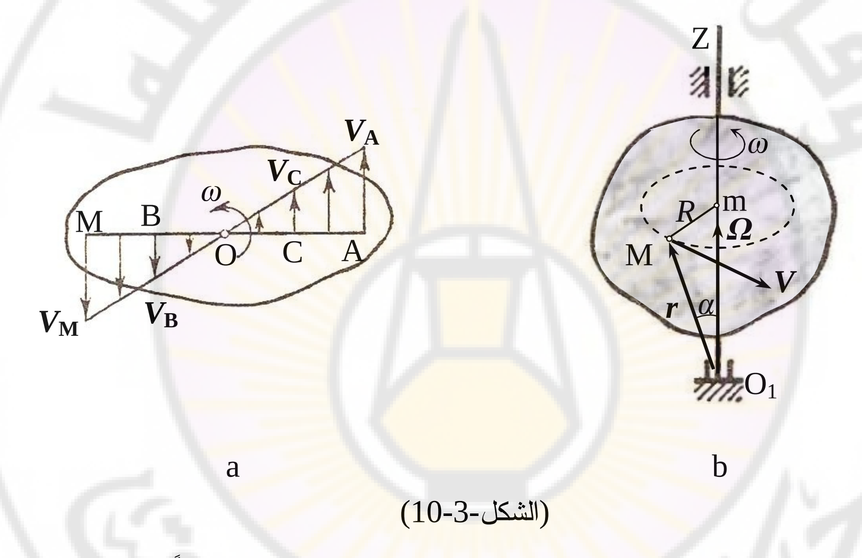
نلاحظ أن المشتق $\dot{q}$ مشترك بين كل المساقط Q ، فهو مشترك لكل النقاط M ، ويدعى بالسرعة الزاوية للحركة الدورانية للجسم الصلب، ويرمز له بـــ ω ، ويتصف كما ذكر في بحث الحركة الدائرية لجسيم.

عندئذ يمكن القول إن القيمة العددية للسرعة الخطية للنقطة أو الجسيم M من الجسم الصلب في حركته الدورانية حول محور ثابت مار منه بالطريقة الطبيعية، يساوي إلى حاصل ضرب السرعة الزاوية للجسم ببعد الجسيم عن محور الدوران، ومنحاها يقع على امتداد مماس الدائرة التي يرسمها الجسيم M ، أي عمودي على نصف قطر الدوران، وتتجه باتجاه دوران ω ، وحيث إن ω في اللحظة المعينة لها قيمة واحدة لكل جسيمات الجسم في حركته الدورانية، وعليه فإن سرع جسيمات الجسم تتناسب طرداً مع بعدها عن محور الدوران وثابت التناسب هو ω :

$$\frac{V_M}{R} = \frac{V_{M_1}}{R_1} = w$$

وبما أن الحركة الدورانية لجسم صلب حول محور ثابت مار منه، هي شكل من أشكال الحركة المستوية، فإنه يكفي دراسة حركة جسيمات المقطع العرضاني منه، والذي يدور حول النقطة الثابتة O نقطة تقاطعه مع محور الدوران Δ ، وبالتالي فإن سرع نقاط المستقيم A , B , C الواقعة على استقامة OM تتناسب طرداً مع بعدها عن مركز دوران المقطع كما هو مبين في (الشكل-3-10a)، وفق العلاقة:

$$\frac{V_M}{OM} = \frac{V_A}{OA} = \frac{V_B}{OB} = \frac{V_C}{OC} = w \qquad (22\text{-}3)$$



(الشكل-3-10)

أما علاقة السرعة الخطية للجسيم M بطريقة المتجهات، فاستناداً للعلاقة (3-21) يمكن كتابة العلاقة الشعاعية للسرعة بالشكل:

$$\boldsymbol{V_Q} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{O_1Q}$$

بالمثل:

$$\boldsymbol{V_M} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{mM} \qquad (23\text{-}3)$$

حيث **mM** يساير $\mathbf{O_1Q}$ ، ومن جهة أخرى لدينا:

$$\mathbf{O_1M} = \mathbf{O_1m} + \mathbf{mM}$$

بتعويض قيمة **mM** من هذه العلاقة في العلاقة (3-23)، علماً أن $\mathbf{O_1m}$ يوازي $\boldsymbol{\Omega}$ مما يؤدي إلى:

$$\mathbf{O_1m} \wedge \boldsymbol{\Omega} = 0$$

بالتالي يمكن كتابة علاقة السرعة الخطية (3-23) بالشكل:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{O_1M} \qquad (24\text{-}3)$$

ومنه نستنتج أن متجه السرعة الخطية لجسيم يساوي الجداء الشعاعي، لمتجه السرعة الزاوية ونصف القطر الشعاعي المعتبر من نقطة ما على محور الدوران، كما أنه يمثل عزم المتجه $\boldsymbol{\Omega}$ بالنسبة للنقطة M كما هو مبين في (الشكل-3-10b).

وإذا علمنا وضع الجسيم M من الجسم الصلب بدلالة الثلاثية الثابتة T_1 ، وعلمنا السرعة الزاوية $(\dot{\theta} = w)$ ، أي تحولات الزاوية θ بدلالة الزمن t ، أمكن تحديد سرعة الجسيم M بطريقة الإحداثيات على الشكل التالي:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{j}_1 & \boldsymbol{k}_1 \\ 0 & 0 & w \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = -w \,.\, y_1 \,.\, \boldsymbol{i}_1 + w \,.\, x_1 \,.\, \boldsymbol{j}_1 \qquad (25\text{-}3)$$

نستنتج من(3-24) و (3-25) أن متجه السرعة الخطية $\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}}$ يوازي المستوي $O_1X_1Y_1$ ، ويتجه باتجاه الحركة على امتداد مماس الدائرة التي يرسمها الجسيم خلال حركته، وقيمته العددية:

$$V_{\mathrm{M}} = w\,(x_1^2 + y_1^2)^{1/2} \qquad (26\text{-}3)$$

مسألة 3-3-1

زاوية متماسكة EOF قابلة للدوران حول مفصل ثابت O ، وضلعاها مجريان تتحرك داخلهما منزلقتان A و C مثبتتان بنهايتي وصلتين AB و CD ، حيث تستطيع الوصلتان الدوران حول مفصلين ثابتين B و D ، فإذا كانت الأطوال كالتالي:

OA = AB = 2OC = 2CD

أوجد السرعة الزاوية ω_2 للوصلة AB للموضع المبين في (الشكل-3-11a)، بدلالة السرعة الزاوية ω_1 لدوران الوصلة CD .

ملاحظة:

تتساوى مركبة سرعة المنزلقة C في الاتجاه العمودي على المجرى مع المركبة العمودية للمنزلقة C على أنها نقطة من المجرى OF ، وكذلك في حال المنزلقة A .

الحل:

من معرفة السرعة الزاوية ω_1 لدوران الوصلة CD ، نبدأ بدراسة السرع اعتباراً من المنزلقة C التي تتحرك حركة دورانية حول D ، منه:

$$V_{C/D} = CD.w_1$$

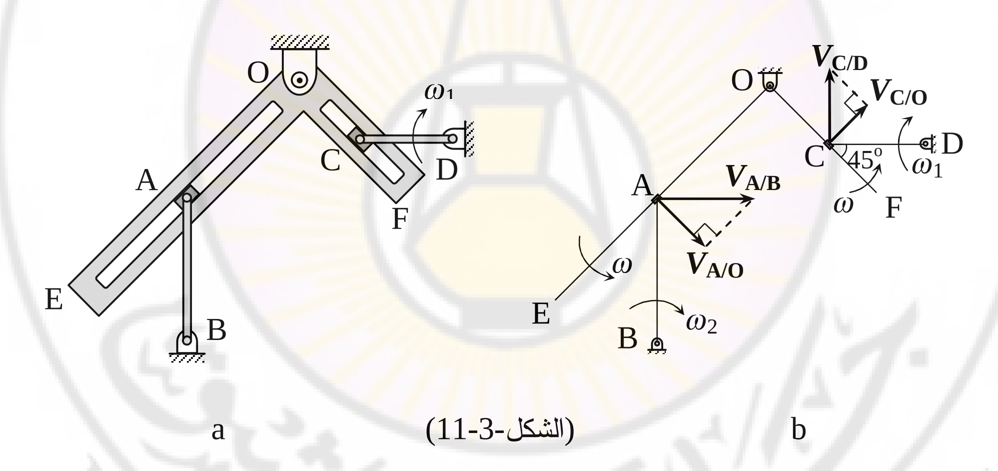
بمساواة مركبة سرعة المنزلقة C في الاتجاه العمودي على OF بالمركبة العمودية لسرعة المنزلقة C من المجرى OF نفسه، نجد:

$$V_{C/O} = V_{C/D}.\cos 45^o$$

بالتالي السرعة الزاوية ω للزاوية المتماسكة تعطى بـــ :

$$OC.w = CD.w_1/\sqrt{2} \qquad \Rightarrow \qquad w = w_1/\sqrt{2}$$

واتجاهها بعكس اتجاه ω_1 ، أي عكس حركة عقارب الساعة وذلك وفق اتجاه دوران متجه السرعة $V_{C/O}$ حول O الموضح في (الشكل-3-11b).



a (الشكل-3-11) b

وعلى هذا فسرعة الزالقة A على اعتبارها نقطة من الساق OE تكون:

$$V_{A/O} = OA.w$$

ومن الملاحظة بمساواة هذه السرعة بمركبة سرعة الزالقة A على أنها نقطة من الوصلة AB نحصل على:

$$V_{A/B} = V_{A/O} / \cos 45^o$$

بالتالي السرعة الزاوية للوصلة AB تساوي:

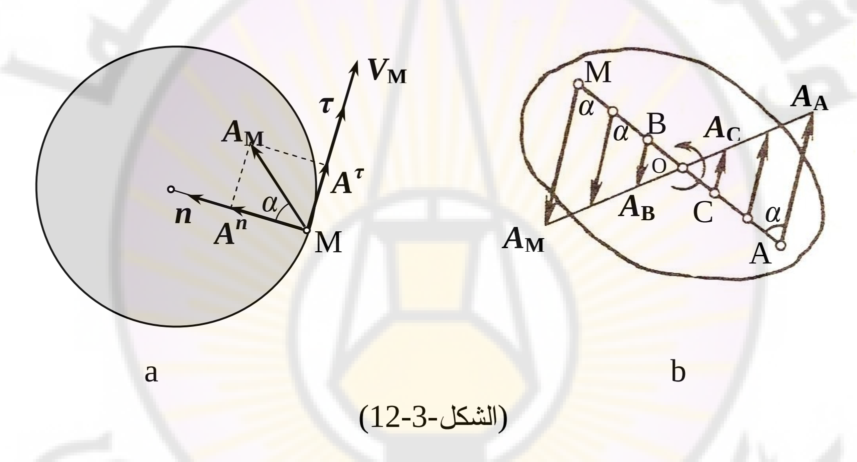
$$AB.w_2 = \sqrt{2}\, AO.w \qquad \Rightarrow \qquad w_2 = \sqrt{2}w = w_1$$

واتجاهها باتجاه السرعة $V_{A/B}$ ، أي باتجاه حركة عقارب الساعة كما في (الشكل-3-11b).

4-5- التسارع الخطي لجسيم من جسيمات الجسم الدائر

عند دوران الجسم الصلب حول المحور Δ ، فإن تسارع Q مسقط النقطة M على المستوي الأفقي $O_1X_1Y_1$ ، يقع في المستوي $O_1X_1Y_1$ ، وتسارع M يساير تسارع Q لأن المتجه **QM** ثابت في المنحى والجهة والطول كما هو مبين في (الشكل-3-8).

ومنه يقع تسارع النقطة M في مستوي دائرة حركته، ويتحلل في مستوي الدائرة إلى تسارع ناظمي $\boldsymbol{A_n}$ وتسارع مماسي $\boldsymbol{A_\tau}$ كما هو مبين في (الشكل-3-12a).



(الشكل-3-12)

حيث المركبة الناظمية ($\boldsymbol{A_n} = R\ .\ \omega^2 .\ \boldsymbol{n}$) منحاها نصف القطر **mM** ، وتتجه من M إلى **m** دوماً، وقيمتها العددية:

$$A_n = R\ .\ \omega^2 \qquad (27\text{-}3)$$

والمركبة المماسية ($\boldsymbol{A_\tau} = R\ .\ \varepsilon\ .\ \boldsymbol{\tau}$) منحاها مماس للدائرة، وتتجه باتجاه دوران ε ، وباتجاه متجه السرعة أي باتجاه الحركة إذا كانت الحركة متسارعة والعكس بالعكس، وقيمتها العددية:

$$A_\tau = R\ .\ \varepsilon \qquad (28\text{-}3)$$

حيث R يمثل بعد النقطة M عن محور الدوران Δ أي المحور O_1Z_1 ، ومنه متجه التسارع لـــ M يحدد بالعلاقة:

$$\boldsymbol{A_M} = \boldsymbol{A_n} + \boldsymbol{A_\tau} = R.w^2 .\boldsymbol{n} + R.e\ .\boldsymbol{\tau} \qquad (29\text{-}3)$$

والقيمة العددية للتسارع هي:

$$A_M = [A_n^2 + A_t^2]^{1/2} = R[w^4 + e^2]^{1/2} \qquad (30\text{-}3)$$

ويميل متجه التسارع عن نصف قطر دائرة المسار **mM** التي ترسمها النقطة خلال حركتها بالزاوية α ، والتي تعين بالعلاقة:

$$a = \arctan \frac{|A_t|}{A_n} = \arctan \frac{|e|}{w^2} \qquad (31\text{-}3)$$

ولما كان ω و ε مشتركين في لحظة معينة t لجميع جسيمات الجسم الصلب، فمتجه التسارع يصنع زوايا متساوية α مع أنصاف أقطار الدوائر، التي ترسمها هذه الجسيمات.

وحيث إن لكل من ω و ε في اللحظة المعينة قيمة واحدة لكل جسيمات الجسم في حركته الدورانية، فيتضح من العلاقتين (3-30) و (3-31) أن تسارعات جسيمات الجسم الصلب M الدائر حول المحور Δ ليست متسايرة، حيث متجهاتها تصنع زوايا متساوية α مع أنصاف أقطار الدوائر، التي ترسمها هذه الجسيمات، وقيمها العددية تتناسب طرداً مع بعدها عن محور الدوران، وثابت التناسب هو $[w^4 + e^2]^{1/2}$.

كما يتضح أن تسارعات جسيمات المقطع العرضاني الدائر حول النقطة O نقطة تقاطعه مع محور الدوران ليست متسايرة أيضاً، حيث متجهاتها تصنع زوايا متساوية α مع أنصاف أقطار الدوائر، التي ترسمها هذه الجسيمات كما هو مبين في (الشكل-3-12b)، وقيمها العددية تتناسب طرداً مع بعدها عن محور الدوران، وثابت التناسب هو.

$$\frac{A_A}{OA} = \frac{A_B}{OB} = \frac{A_C}{OC} = \frac{A_M}{OM} = [w^4 + e^2]^{1/2}$$

5-5- معادلات الحركة الدورانية للجسم الصلب

Equations of Rotational Motion of a Rigid Body

يقال عن حركة جسم صلب يدور حول محور ثابت Δ أنها معلومة، عندما يمكن كتابة الإحداثية الزاوية θ في صورة تابع معلوم بدلالة الزمن t ، أي:

$$q = f(t)$$

ومع ذلك فإنه نادراً ما تعين حركة الجسم الصلب الدورانية في التطبيق العملي بعلاقة من هذا النوع، وعموماً فإن شكل التسارع الزاوي ε للجسم الصلب يلعب دوراً رئيسياً في تعيين شروط حركته الدورانية.

مثلا يمكن إعطاء ε كتابع للزمن t ، أو كتابع للإحداثية الزاوية θ ، أو كتابع للسرعة الزاوية ω ، حيث لدينا مما سبق:

$$w = \frac{dq}{dt} \qquad , \qquad e = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

بحذف الزمن من العلاقتين ينتج:

$$e = w\frac{dw}{dq} \qquad (32\text{-}3)$$

بدراسة المعادلات السابقة نجد أنها تشابه تماماً المعادلات التي سبق وحصلنا عليها في بحث الحركة المستقيمة للجسيم المادي، ويمكننا بالتالي مكاملتها جميعاً بنفس الطريقة التي ذكرت في بحث الحركة المستقيمة، وكثيراً ما نقابل بالتطبيقات العملية حالتين خاصتين للحركة الدورانية وهما: الحركة الدورانية المنتظمة والحركة الدورانية المتغيرة بانتظام.

5-5-1- الحركة الدورانية المنتظمة ***Uniform Rotational Motion***

إذا بقيت السرعة الزاوية (ω = const) ثابتة بتحول الزمن يمكننا القول أن الجسم الصلب يدور بانتظام حول المحور Δ .

للحصول على معادلة الحركة هذه لدينا:

$$\frac{dq}{dt} = w \qquad \Rightarrow \qquad dq = w.dt$$

بالتكامل:

$$q - q_0 = w.t$$

ومن الشروط الابتدائية عندما:

$$t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q_0 = 0$$

نحصل على معادلة الحركة الدورانية المنتظمة للجسم الصلب:

$$q = w.t \qquad (33\text{-}3)$$

عند الدوران المنتظم تكون السرعة الزاوية:

$$w = q / t \qquad (34\text{-}3)$$

في التطبيقات الهندسية كثيراً ما نعد السرعة الزاوية ω ممثلة لعدد دورات الجسم في الدقيقة الواحدة r.p.m ، فبعد دورة واحدة يكون الجسم قد دار زاوية قدرها 2π ، وإذا دار الجسم الصلب n دورة في الدقيقة الواحدة ($t = 1 \min = 60 \sec$)، كان عندها ($q = 2p .n$)، ومنه العلاقة بين عدد الدورات والسرعة الزاوية:

$$w = \frac{2p .n}{60} \approx 0.1\, n \qquad (35\text{-}3)$$

ويعني مما تقدم أنه في الحركة الدورانية المنتظمة، إذا أعطينا n عدد دورات الجسم في الدقيقة الواحدة كانت السرعة الزاوية ω مساوية تقريباً لـــ $0.1\ n$ ، ويكون التسارع الزاوي معدوماً ($\varepsilon = 0$).

5-2-5- الحركة الدورانية المتغيرة بانتظام

Uniformly Variable Rotational Motion

يتحرك الجسم بحركة دورانية متغيرة بانتظام، إذا كان في كل لحظة زمنية ازدياد (أو نقصان) السرعة الزاوية خلال فترات زمنية متساوية واحداً، أي بتسارع زاوي ثابت ($e = \pm\text{const}$)، يدعى هذا النوع من الحركة بالحركة المتسارعة بانتظام (*Uniformly Accelerated Circular Motion*)، أو (متباطئة بانتظام) (*Uniformly Decelerated Circular Motion*).

للحصول على معادلة هذه الحركة لدينا:

$$\frac{dw}{dt} = \pm e \qquad \Rightarrow \qquad dw = \pm e .dt$$

بالتكامل بدلالة الزمن:

$$w - w_0 = \pm e .t$$

وبالاعتماد على الشروط الابتدائية عندما:

$$t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad w = w_0$$

نحصل على معادلة السرعة الزاوية للجسم الصلب:

$$w = \pm e .t + w_0 \qquad (36\text{-}3)$$

حيث تكتب بشكل آخر:

$$\frac{dq}{dt} = \pm e .t + w_0 \qquad \Rightarrow \qquad dq = \pm e .t .dt + w_0 .dt$$

بالتكامل بدلالة الزمن:

$$q - q_0 = \pm \frac{1}{2} e \,.\, t^2 + w_0 \,.\, t \qquad (37\text{-}3)$$

وبالاعتماد على الشروط الابتدائية عندما:

$$t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q_0 = 0$$

نحصل على معادلة الحركة الدورانية المتغيرة بانتظام للجسم الصلب:

$$q = \pm \frac{1}{2} e \,.\, t^2 + w_0 \,.\, t \qquad (38\text{-}3)$$

فإذا كان الجداء ($\varepsilon \,.\, \omega > 0$) كانت الحركة الدورانية متسارعة بانتظام، وإذا كان الجداء ($\varepsilon \,.\, \omega < 0$) كانت الحركة الدورانية متباطئة بانتظام.

وبحذف الزمن t بين العلاقتين (3-36) و (3-37) نحصل على:

$$w^2 - w_0^2 = \pm 2e \, (q - q_0) \qquad (39\text{-}3)$$

علاقة السرعة الزاوية بدلالة زاوية الدوران.

مسألة 3-2-

بدأت حذافة قطرها (d = 50 cm) بالدوران من السكون حتى وصلت إلى سرعة (n = 280 r.p.m) خلال زمن (t = 15 sec)، أوجد سرعة نقطة على محيطها وتسارعها بعد ثانية واحدة من بدء الحركة، مفترضاً أن التسارع الزاوي ثابت.

الحل:

لحساب سرعة نقطة من محيط الحذافة وتسارعها نحسب السرعة الزاوية والتسارع الزاوي لها.

بما أن التسارع الزاوي ثابت فمن العلاقة:

$$w = e \,.\, t + w_0 \qquad \Rightarrow \qquad e = (w - w_0) / t$$

حيث ($\omega_0 = 0$) السرعة الزاوية الابتدائية، و ω السرعة الزاوية النهائية أي بعد زمن (t = 15 sec)، وتساوي:

$$w = 2p \,.\, n / 60 = 29.3 \text{ rad/sec}$$

بالتعويض نحصل على التسارع الزاوي:

$$e = 1.96 \text{ rad/sec}^2$$

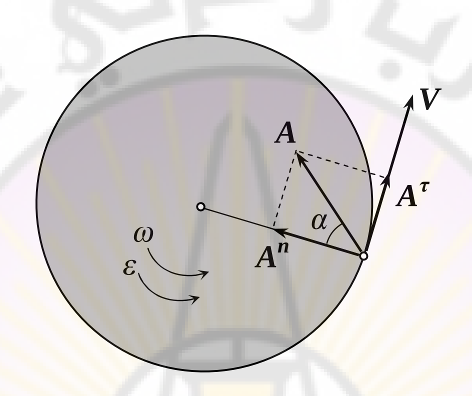
أما السرعة الزاوية بعد ثانية من الحركة فهي:

$$w_1 = e\,.t + w_0 = 1.96 \times 1 = 1.96 \text{ rad/sec}$$

وبما أن الحركة بدأت من السكون فالحركة متسارعة بالتالي اتجاه ε باتجاه ω .

وتكون سرعة نقطة على محيط الحدافة:

$$V = R_1 .w_1 = 25 \times 1.96 = 49 \text{ cm/sec}$$



(الشكل-3-13)

أما تسارع أي نقطة على محيط الحذافة فله مركبتان كما هو مبين في (الشكل3-13):

المركبة الناظمية:

$$A_n = R.w_1^2 = 25(1.96)^2 = 96.04 \text{ cm/sec}^2$$

والمركبة المماسية:

$$A_t = R.e = 25 \times 1.96 = 49 \text{ cm/sec}^2$$

والتسارع الكلي:

$$A = [A_n^2 + A_t^2]^{1/2} = R[w_1^4 + e^2]^{1/2} = 107.8 \text{ cm/sec}^2$$

وزاوية ميل متجه تسارع أي نقطة على محيط الحدافة على الناظم $\boldsymbol{n}$ ، أي على نصف قطر الحدافة فهي:

$$a = \arctan \frac{|A_t|}{A_n} = \arctan \frac{|e|}{w^2} = \arctan 0.51 = 27^{\circ}$$

مسألة 3-3-3

إذا كانت العلاقة بين الزاوية التي يدورها جسم والزمن معطاة بالعلاقة:

$$q = c.t^2 + b.t + q_0$$

حيث b و c ثوابت تناسب، فإذا علمنا أن السرعة الزاوية الابتدائية كانت ($\omega_0 = 2\pi$ rad/sec) ثم أصبحت ($\omega_1 = 4\pi$ rad/sec) بعد ثانية واحدة. المطلوب إيجاد التعبير العام عن السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للجسم.

الحل:

لدينا معادلة الحركة:

$$q = c.t^2 + b.t + q_0$$

لإيجاد معادلة السرعة الزاوية نشتق معادلة الحركة بدلالة الزمن:

$$w = \dot{q} = 2c.t + b$$

من الشروط الابتدائية:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad b = w_0 = 2p$$

$$t = 1 \quad \Rightarrow \quad w_1 = 4p \quad \Rightarrow \quad 4p = 2c.t + 2p \quad \Rightarrow \quad c = p$$

بالتعويض في علاقة السرعة الزاوية نحصل على:

$$w = 2p.t + 2p = 2p(t+1)$$

أما التسارع الزاوي فنحصل عليه باشتقاق معادلة الحركة مرة ثانية بالنسبة للزمن:

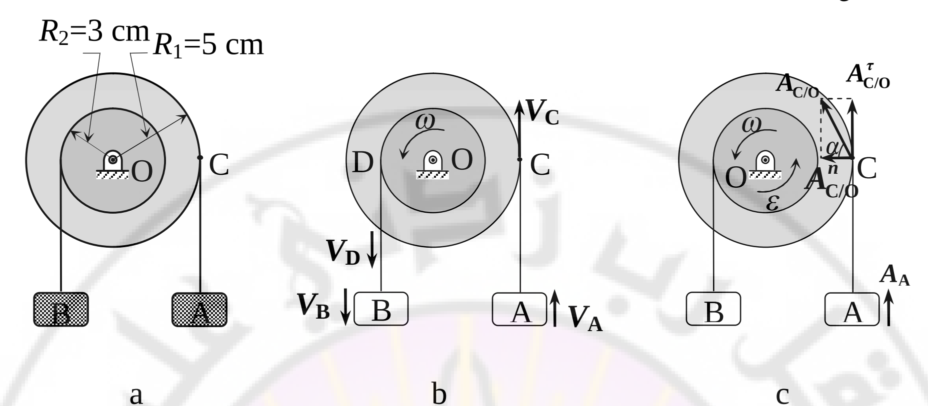
$$e = \dot{w} = \ddot{q} = 2p$$

مسألة 4-3-3

تدور بكرة حول محور ثابت مار من مركزها، وتتصل بها كتلتان A و B بواسطة حبلين كما هو مبين في (الشكل-3-14a)، فإذا كان تسارع الكتلة A ثابتاً ويساوي إلى ($A_A = 10$ m/sec^2)، والسرعة الابتدائية لها ($V_{A0} = 15$ m/sec) وكلاهما نحو الأعلى. المطلوب حساب:

1. عدد الدورات التي تدورها البكرة خلال زمن ($t = 3$ sec).
2. سرعة الكتلة B وموضعها بعد زمن ($t = 3$ sec).
3. تسارع النقطة C على البكرة عند الزمن ($t = 0$ sec).

الحل:



(الشكل-3-14)

بما أن الحبل المتصل بالكتلة A ثابت الطول، ويتحرك حركة انسحابية يكون لدينا كما في (الشكل-3-14b):

$$V_{\mathrm{C/O}} = V_{\mathrm{A}} = 15\ \mathrm{m/sec}$$

وفي (الشكل-3-14c) لدينا:

$$A^{t}_{\mathrm{C/O}} = A_{\mathrm{A}} = 10\ \mathrm{m/sec^2}$$

1. لحساب عدد الدورات التي تدورها البكرة، نحسب زاوية الدوران خلال زمن ($t = 3\ \mathrm{sec}$) باستخدام معادلة الحركة الدورانية بتسارع ثابت، حيث لدينا:

$$q = \frac{1}{2} e\,.t^2 + w_0\,.t$$

وتحسب ω_0 من:

$$V_{\mathrm{C/O}} = R_1 . w_0 \quad \Rightarrow \quad w_0 = \frac{V_{\mathrm{C/O}}}{R_1} = \frac{15}{5} = 3\ \mathrm{rad/sec}$$

وتحسب ε من:

$$A^{t}_{C/O} = R_1 . e \quad \Rightarrow \quad e = \frac{A^{t}_{C/O}}{R_1} = \frac{10}{5} = 2\ \mathrm{rad/sec^2}$$

ومنه بالتعويض في معادلة الحركة:

$$\theta = 18\ \ \mathrm{rad}$$

ويكون عدد الدورات:

$$n = \theta / 2\pi = 18 / 2\pi = 2.86\ \ \mathrm{rev}$$

2. لحساب سرعة الكتلة B ، لدينا:

$$V_B = V_D = R_2 . w$$

وتحسب السرعة الزاوية بعد زمن ($t = 3$ sec) من العلاقة:

$$w = e . t + w_0 \quad \Rightarrow \quad w = 2 \times 3 + 3 = 9 \text{ rad/sec}$$

ومنه سرعة الكتلة B :

$$V_B = 3 \times 9 = 27 \text{ m/sec}$$

ولحساب موضع الكتلة B ، لدينا:

$$y_B = s_D = R_2 . q = 3 \times 18 = 54 \text{ m}$$

3. لحساب تسارع النقطة C عند الزمن ($t = 0$)، فمن (الشكل-3-14c) لدينا:

$$A^t_{C/O} = A_A = 10 \text{ m/sec}^2$$

ولدينا:

$$A^n_{C/O} = R_2 . w_0^2 = 5\,(3)^2 = 45 \text{ m/sec}^2$$

بالتالي يكون تسارع النقطة C :

$$A_{C/O} = [(A^t_{C/O})^2 + (A^n_{C/O})^2]^{1/2} = 46.1 \text{ m/sec}^2$$

وزاوية ميل التسارع $A_{C/O}$ على التسارع الناظمي الموضحة في (الشكل-3-14c)، هي:

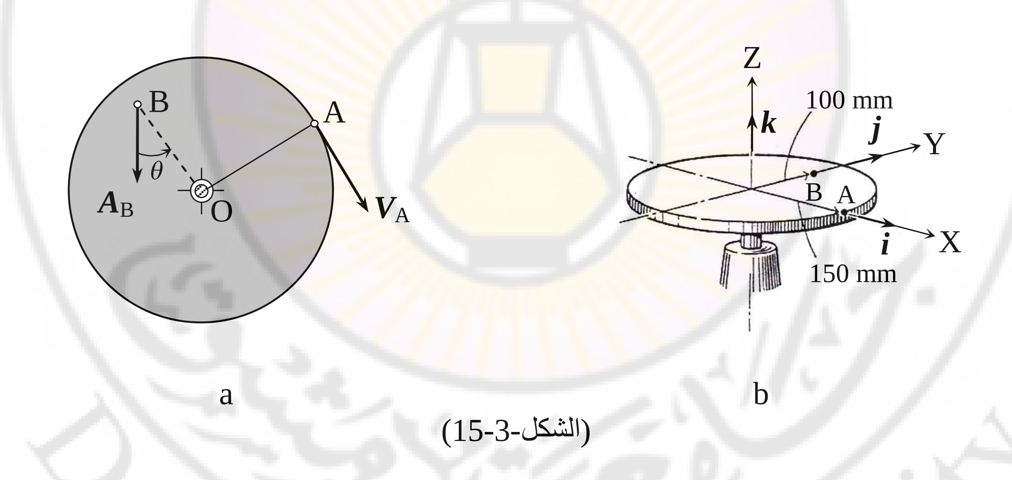
$$a = \arctan \frac{A^t_{C/O}}{A^n_{C/O}} = 12.5^o$$

PROBLEMS	مسائل غير محلولة

مسألة - 1

يدور قرص دائري حول مركزه O ، فإذا كانت سرعة النقطة المحيطية A تساوي في لحظة معينة ($V_A = 0.8$ m/sec)، وفي الاتجاه الموضح في (الشكل-3-15a)، وفي اللحظة نفسها بقيت الزاوية θ المحصورة، بين نصف قطر المتجه لأي نقطة B ومتجه التسارع الكلي لها تساوي 0.6 . المطلوب في هذه اللحظة، حساب التسارع الزاوي ε للقرص

الجواب: $\varepsilon = 38.4$ rad/sec^2



(الشكل-3-15)

مسألة - 2

يدور قرص دائري حول محوره Z كما هو مبين في (الشكل-3-15b)، فإذا كانت سرعة النقطة B الواقعة على القرص في لحظة معينة تساوي ($V_B = 0.4\, \boldsymbol{i}$ m/sec)، والمركبة المماسية لتسارع النقطة A هي ($A_A^t = 1.8\, \boldsymbol{j}$ m/sec^2) . المطلوب إيجاد العلاقة الشعاعية للسرعة الزاوية ω للقرص، والتسارع الكلي للنقطة B في هذه اللحظة.

مسألة - 3

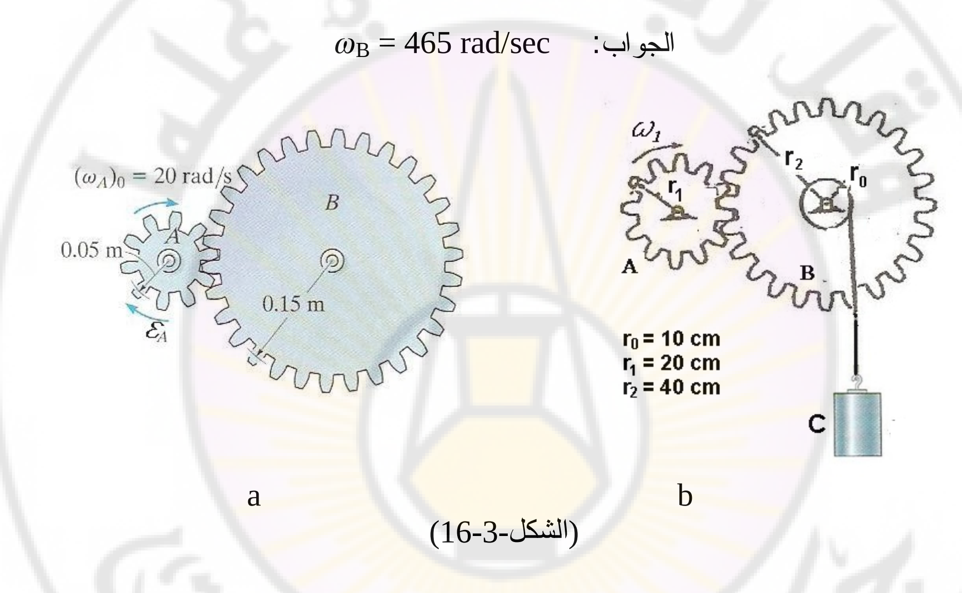
يقوم محرك كهربائي غير موضح على (الشكل-3-16a)، بتدوير المسنن A بتسارع زاوي يتحدد بالعلاقة:

$$\varepsilon_A = 0.25\ \theta^3 + 0.5\ \text{rad/sec}^2$$

حيث الزاوية θ تقاس بالراديان.

المطلوب بعد أن يدور المسنن A عشر لفات 10 rev ، حساب السرعة الزاوية للمسنن B .

الجواب: $\omega_B = 465$ rad/sec



a b

(الشكل-3-16)

مسألة - 4

يقوم المسننان B و A برفع الثقل C ، بمساعدة بكرة وحبل كما هو مبين في (الشكل-3-16b). حيث يدور المسنن الصغير بسرعة زاوية ابتدائية مقدارها ($\omega_1 = 27$ rad/sec)، ثم تتباطأ حركته بانتظام ($\varepsilon_1 = -5$ rad/sec^2)، فإذا كان:
($r_1 = 20$ cm) و ($r_2 = 40$ cm)، وكان نصف قطر البكرة ($r_0 = 10$ cm)،
المطلوب في اللحظة الموافقة لـــ ($t = 3$ sec)، حساب ما يلي:
السرعة الزاوية لكل من المسنن الصغير A ، والمسنن الكبير B ، وسرعة الثقل المرفوع C وتسارعه.

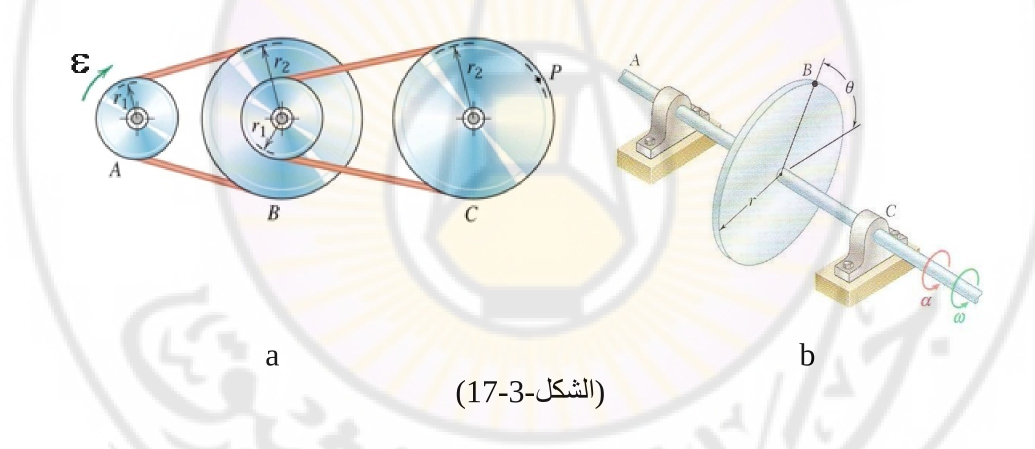
الجواب: $\omega_A = 12$ rad/sec , $\omega_B = 6$ rad/sec
$V_C = 0.6$ m/sec-up , $A_C = -0.25$ m/s^2-down

مسألة - 5

تبدأ البكرة A حركتها الدورانية من السكون، ثم تتسارع بانتظام (ε = Constant) بمقدار $10\ \text{rad/sec}^2$ ، مما يؤدي إلى تدوير البكرتين B , C عن طريق زوج من السيور، كما هو مبين في (الشكل-3-17a). فإذا كان ($r_1 = 15\ \text{cm}$) و ($r_2 = 30\ \text{cm}$)، المطلوب في اللحظة ($t = 3\ \text{sec}$)، حساب ما يلي:

1. السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للبكرة C .
2. سرعة النقطة P وتسارعها.

الجواب: $\omega_C = 7.5\ \text{rad/sec}\quad,\quad \varepsilon_C = 2.5\ \text{rad/ sec}^2$
$V_P = 2.25\ \text{m/s}\quad,\quad A_P = 16.9\ \text{m/sec}^2$



a b

(الشكل-3-17)

مسألة - 6

يدور قرص دائري مثبت على محور أفقي AC بتسارع زاوي ثابت مقداره ($\varepsilon = 0.3\ \text{rad/sec}^2$) وفق الاتجاه المبين في (الشكل-3-17b). فإذا بدأت الحركة من السكون، وكان نصف قطر القرص ($r = 20\ \text{cm}$)، المطلوب في اللحظة الموافقة للزمن ($t = 10\ \text{sec}$)، حساب سرعة النقطة B الواقعة على محيط القرص وتسارعها.

الجواب: $V_B = 0.6\ \text{m/s}\quad,\quad A_B = 1.8\ \text{m/s}^2$

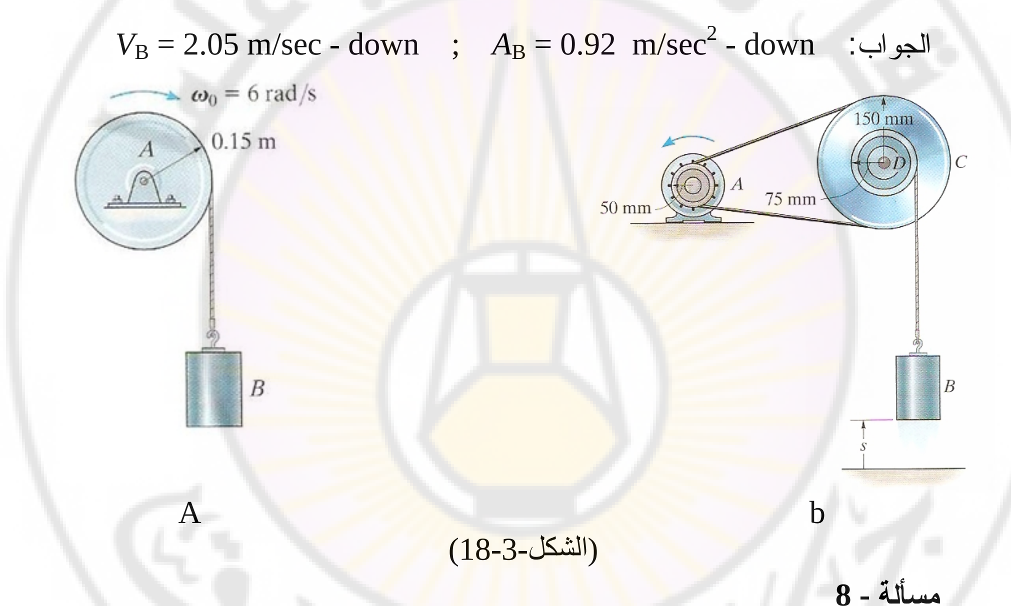
مسألة - 7

يقوم محرك كهربائي غير موضح على (الشكل-3-18a) بتدوير المسنن A ، والاسطوانة المثبتة عليه باتجاه عقارب الساعة، وبتسارع زاوي محدد بالعلاقة التالية:

$$e = 0.6\,t^2 + 0.75$$

حيث الزمن t يقاس بالثواني، فإذا علمت ان السرعة الزاوية الابتدائية للمسنن A تساوي 6 rad/sec . المطلوب في اللحظة الموافقة لـــ (t = 3 sec)، حساب سرعة الثقل B وتسارعه في أثناء حركته بمساعدة السلك نحو الأسفل.

الجواب: V_B = 2.05 m/sec - down ; A_B = 0.92 m/sec^2 - down



A b

(الشكل-3-18)

مسألة - 8

تدور البكرة A بواسطة محرك كهربائي في المجموعة الموضحة في (الشكل-3-18b)، حيث تبدأ حركتها من السكون من الوضع الموافق لـــ (s = 0)، بتسارع زاوي منتظم مقداره (ε_A = 6 rad/sec^2)، فإذا علمت أن البكرتين C و D تدوران معاً حول المحور نفسه. المطلوب في اللحظة التي يصبح فيها الثقل B على ارتفاع (s = 7.5 m)، حساب ما يلي:

1. السرعة الزاوية للبكرة A .
2. السرعة الزاوية للبكرة C .
3. سرعة الحمل B .

الجواب: ω_A = 60 rad/sec , ω_C = 20 rad/sec , V_B = 1.5 m/sec - up

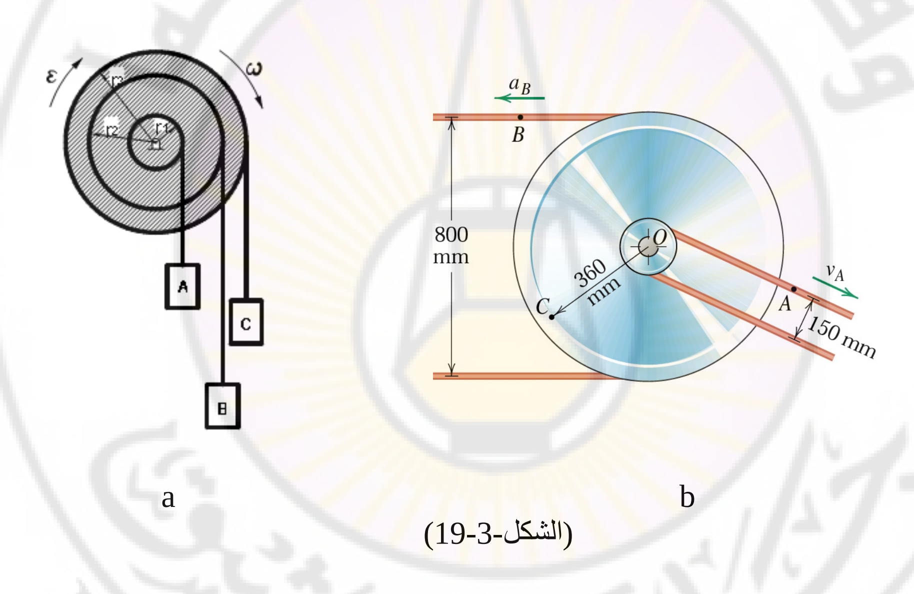
مسألة - 9

تدور البكرة المتدرجة بسرعة زاوية ($\omega = 25$ rad/sec)، وبتسارع زاوي مقداره ($\varepsilon = 6$ rad/sec^2)، وفق الاتجاهات الموضحة على (الشكل-3-19a)، فإذا كان:

$$r_1 = 160 \text{ mm} \quad , \quad r_2 = 400 \text{ mm} \quad , \quad r_3 = 540 \text{ mm}$$

المطلوب في اللحظة المبينة في الشكل، حساب سرعة الأحمال A , B , C وتسارعها.

الجواب: $V_A = 4$ m/s - down ; $A_A = 0.96$ m/sec^2 - down
$V_B = 10$ m/s - down , $A_B = 2.4$ m/sec^2 - down
$V_C = 13.5$ m/s - down , $A_C = 3.24$ m/sec^2 - down



a b

(الشكل-3-19)

مسألة - 10

تشكل البكرتان الموضحتان في (الشكل-3-19b) وصلة متكاملة، لذا فهما تدوران معاً حول محور ثابت يمر من النقطة O ، ففي لحظة معينة كانت سرعة النقطة A الواقعة على سير البكرة الصغرى تساوي ($V_A = 1.5$ m/s)، وكان تسارع النقطة B الواقعة على سير البكرة الكبرى يساوي ($A_B = 45$ m/sec^2). المطلوب حساب تسارع النقطة C .

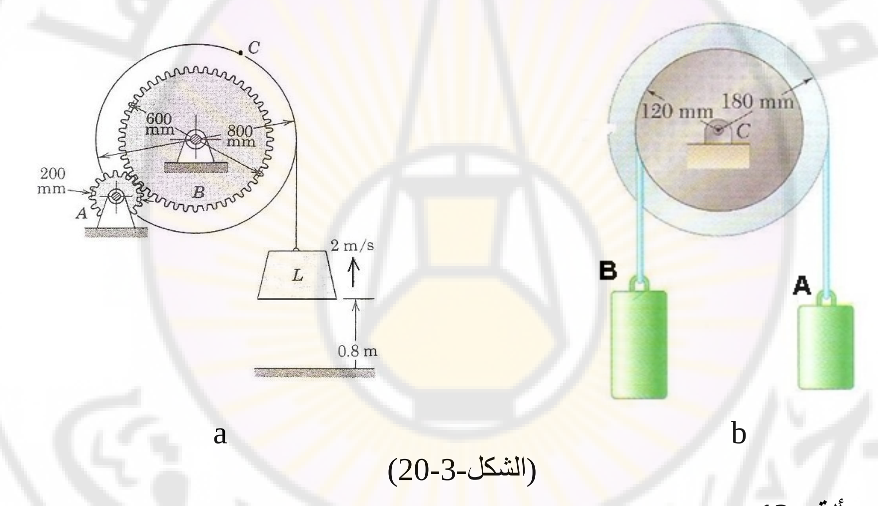
الجواب: $A_C = 149.6$ m/sec^2

مسألة - 11

يقوم المسنن الصغير (*Pinion*) A بتدوير المسنن (*Gear*) B ، والذي يتصل بدوره بأسطوانة الرفع C كما هو مبين في (الشكل-3-20a)، بفرض أن الحمل L قد بدأ حركته من السكون ثم تسارعت حركته بانتظام، واكتسب سرعة مقدارها 2 m/s عندما وصل إلى ارتفاع 0.8 m فوق موضع البداية. المطلوب حساب:

1. تسارع النقطة C .
2. السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للمسنن A .

الجواب: $A_C = 10.31 \text{ m/sec}^2$, $\omega_A = 15 \text{ rad/sec}$, $\varepsilon_A = 12.75 \text{ rad/sec}^2$



a b

(الشكل-3-20)

مسألة - 12

تتألف تركيبة الآلية الموضحة في (الشكل-3-20b) من بكرة ثنائـية C تتصل بها كتلتان A و B بواسطة حبلين ، تبدأ المجموعة حركتها من السكون، فإذا كان تسارع الكتلة A ثابتاً ويساوي 3.6 m/sec^2 باتجاه الأعلى. المطلوب في اللحظة ($t = 5$ sec)، حساب ما يلي:

1. السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للبكرة C .
2. عدد الدورات التي تدورها البكرة C .
3. سرعة الكتلة B وتسارعها.

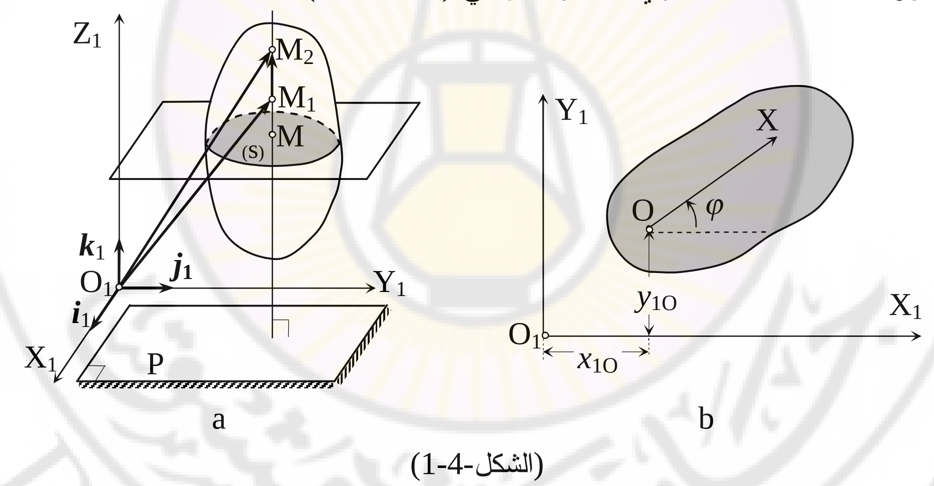
الجواب: $\omega_C = 10 \text{ rad/sec}$, $\varepsilon_C = 2 \text{ rad/sec}^2$, $n = 3.98 \text{ rev}$
$V_B = 1.2 \text{ m/sec}$, $A_B = 0.24 \text{ m/sec}^2$

الفصل الرابع
الحركة المستوية العامة للجسم الصلب
General Plane Motion of a Rigid Body

1- معادلات الحركة المستوية العامة

يقال عن حركة جسم إنها مستوية عامة إذا تحركت جميع جسيمات الجسم وبقيت المسافة بينهم وبين مستوٍ ثابت مفروض لا تتغير، بالتالي تتحرك جميع الجسيمات المادية التي يتشكل منها الجسم الصلب على مسارات توازي المستوي الثابت.

نفترض جسماً صلباً يتحرك حركة مستوية بدلالة جملة إحداثية ثابتة $T_1(O_1X_1Y_1Z_1)$ ، بحيث يوازي مستويها $O_1X_1Y_1$ مستوياً ثابتاً مفروضاً P ، ويعامد محورها O_1Z_1 هذا المستوي كما هو مبين في (الشكل-1a-4).



(الشكل-4-1)

ولدراسة الحركة المستوية العامة لجسم صلب يكفي كما ذكرنا سابقاً، دراسة حركة المقطع العرضاني S لهذا الجسم في مستوي $O_1X_1Y_1$ يوازي المستوي الثابت، وتؤول دراسة حركة الجسم الصلب عندها إلى دراسة مسارات وسرعات وتسارعات جسيمات المقطع العرضاني المذكور.

ويمكننا تعيين موضع المقطع S في المستوي $O_1X_1Y_1$ بموضع مستقيم ما OX يؤخذ في هذا المقطع، ويتحدد موضع هذا المستقيم بواسطة ثلاثة وسطاء كما هو مبين في (الشكل-1b-4):

- موضع نقطة ما في المقطع مثل O ، وتعين بإحداثيتيها $x_{1O}\ , y_{1O}$ وتسمى النقطة O التي اخترناها لتعيين وضع المقطع S بالقطب (*Pole*).
- الزاوية φ المحصورة بين المستقيم الاختياري OX من المقطع S والمحور O_1X_1 .

فعندما يتحرك الجسم الصلب تتحول الوسطاء الثلاثة $\varphi , x_{1O}\ , y_{1O}$ بدلالة الزمن، ويكون وضع الجسم معيناً تماماً في لحظة زمنية t إذا علمنا التوابع:

$$x_{1O} = f_1(t) \quad , \quad y_{1O} = f_2(t) \quad , \quad j = f_3(t) \qquad (1\text{-}4)$$

تعرف هذه العلاقات بالمعادلات الوسيطة للحركة المستوية العامة للجسم الصلب.

ففي الحالة عندما الزاوية φ تبقى ثابتة، بالتالي لا يتغير مع الزمن إلا الإحداثيتان $x_{1O}\ , y_{1O}$ ، ومنه الجسم يتحرك حركة انسحابية فحسب، وعلى العكس إذا بقيت الإحداثيتان $x_{1O}\ , y_{1O}$ ثابتتين لا تتغيران مع الزمن، وتغيرت الزاوية φ فحسب، فإن النقطة O تبقى ثابتة، والمقطع S في هذه الحالة يدور حول هذه النقطة، أما الجسم فإنه يدور حول محور ثابت مار من القطب O ، وعمودي على مستوي المقطع S .

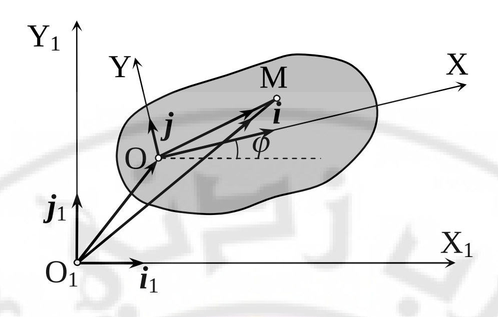
والمميزات الحركية للحركة المستوية العامة للجسم الصلب هي السرعة الخطية والتسارع الخطي للحركة الانسحابية للمقطع، المساويتان لسرعة القطب O وتسارعه، أي:

$$\boldsymbol{V}_{Trans.} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{O}} \quad , \quad \boldsymbol{A}_{Trans.} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{O}}$$

وكذلك السرعة الزاوية ω والتسارع الزاوي ε للحركة الدورانية للمقطع حول القطب، ويمكن الحصول على أي من هذه المميزات في أي لحظة زمنية t بواسطة المعادلات الوسيطة (4-1) للحركة المستوية العامة للجسم الصلب.

2- سرع جسيمات المقطع العرضاني لجسم

نختار في المقطع العرضي S القطب O ، ونرسم المستقيم الثابت OX والمستقيم الثابت الآخر OY العمودي على OX ، فالجملة الإحداثية OXY قائمة ومباشرة واقعة في مستوي المقطع ومقيدة به، ومتحركة بدلالة الجملة الثابتة T_1 كما هو مبين في (الشكل-4-2).



(الشكل-4-2)

نأخذ الجسيم M في المقطع S حيث يمكن تحديد وضعه في المقطع S بدلالة الجملة OXY المقيدة بالمقطع بالمتجه **OM** ، وتصبح إحداثيته بدلالة الجملة T_1 .

$$\mathbf{O_1M} = \mathbf{O_1O} + \mathbf{OM}$$

نكتب بشكل آخر:

$$x_1.\boldsymbol{i_1} + y_1.\boldsymbol{j_1} = x_{1O}.\boldsymbol{i_1} + y_{1O}.\boldsymbol{j_1} + x.\boldsymbol{i} + y.\boldsymbol{j} \qquad (2\text{-}4)$$

حيث:

$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ المتجهان الواحديان للمحورين OX و OY .

$\boldsymbol{i_1}, \boldsymbol{j_1}$ المتجهان الواحديان للمحورين O_1X_1 و O_1Y_1 .

x, y إحداثيات الجسيم M في الجملة OXY ، وهما عددان ثابتان لا يتحولان مع الزمن فهما لا يتحولان مع حركة الجسم.

x_1, y_1 إحداثيات الجسيم M في الجملة T_1 الثابتة.

فإذا أسقطنا العلاقة (4-2) على محوري الجملة الثابتة، وذلك بضرب طرفي العلاقة بالمتجه الواحدي للمحور المسقط عليه.

على المحور O_1X_1 :

$$x_1(\boldsymbol{i_1}.\boldsymbol{i_1}) + y_1(\boldsymbol{j_1}.\boldsymbol{i_1}) = x_{1O}(\boldsymbol{i_1}.\boldsymbol{i_1}) + y_{1O}(\boldsymbol{j_1}.\boldsymbol{i_1}) + x(\boldsymbol{i}.\boldsymbol{i_1}) + y(\boldsymbol{j}.\boldsymbol{i_1})$$

على المحور O_1Y_1 :

$$x_1(\boldsymbol{i_1}.\boldsymbol{j_1}) + y_1(\boldsymbol{j_1}.\boldsymbol{j_1}) = x_{1O}(\boldsymbol{i_1}.\boldsymbol{j_1}) + y_{1O}(\boldsymbol{j_1}.\boldsymbol{j_1}) + x(\boldsymbol{i}.\boldsymbol{j_1}) + y(\boldsymbol{j}.\boldsymbol{j_1})$$

بالحل:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{1O} + x.\cos j - y.\sin j \\ y_1 &= y_{1O} + x.\sin j + y.\cos j \end{aligned} \qquad (3\text{-}4)$$

هاتان المعادلتان تحددان معادلة حركة الجسيم M في المستوي $O_1X_1Y_1$ ، فإذا علمنا المعادلات الوسيطة للحركة (4-1)، أمكن تحديد وضع الجسيم M من المقطع S في كل لحظة زمنية بدلالة الجملة الثابتة، كما يمكن أن نحصل على معادلة المسار وذلك بحذف العامل المشترك φ للمعادلات (4-3).

وتعين سرعة الجسيم M باشتقاق إحداثياته (4-3) بدلالة الزمن t :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x}_{1O} - x.\sin\varphi\,.\dot{\varphi} - y.\cos\varphi\,.\dot{\varphi} \\ \dot{y}_1 &= \dot{y}_{1O} + x.\cos\varphi\,.\dot{\varphi} - y.\sin\varphi\,.\dot{\varphi} \end{aligned} \tag{4-4}$$

فمن المعادلات (4-3) (4-4) نحصل على:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x}_{1O} - (y_1 - y_{1O})\,\dot{\varphi} \\ \dot{y}_1 &= \dot{y}_{1O} + (x_1 - x_{1O})\,\dot{\varphi} \end{aligned} \tag{5-4}$$

وبما أن:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}} = \dot{x}_1\,.\boldsymbol{i}_1 + \dot{y}_1\,.\boldsymbol{j}_1$$

بالتعويض نحصل على:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}} = [\dot{x}_{1O}\,.\boldsymbol{i}_1 + \dot{y}_{1O}\,.\boldsymbol{j}_1] + [-(y_1 - y_{1O})\,\boldsymbol{i}_1 + (x_1 - x_{1O})\,\boldsymbol{j}_1]\,\dot{\varphi} \tag{6-4}$$

حيث الحد الأول من الطرف الأيمن يمثل سرعة القطب O في حركته بالنسبة للمستوي الثابت $O_1X_1Y_1$ ،أي:

$$\dot{x}_{1O}\,.\boldsymbol{i}_1 + \dot{y}_{1O}\,.\boldsymbol{j}_1 = \boldsymbol{V}_{\mathbf{O}} \tag{7-4}$$

أما الحد الثاني من الطرف الأيمن فهو يمثل سرعة الجسيم M في دورانه حول محور مار من القطب O عمودي على كل من المقطع العرضاني والمستوي الثابت، أي:

$$[-(y_1 - y_{1O})\,\boldsymbol{i}_1 + (x_1 - x_{1O})\,\boldsymbol{j}_1]\,\dot{\varphi} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{M/O}} \tag{8-4}$$

حيث $\boldsymbol{\Omega}$ ترمز إلى متجه السرعة الزاوية لدوران المقطع العرضاني حول القطب O ، أي:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\varphi}\,.\boldsymbol{k}_1$$

والمتجه $\mathbf{OM}$ يمثل بالعلاقة:

$$\mathbf{OM} = \mathbf{O_1M} - \mathbf{O_1O} = (x_1 - x_{1O})\,\boldsymbol{i}_1 + (y_1 - y_{1O})\,\boldsymbol{j}_1$$

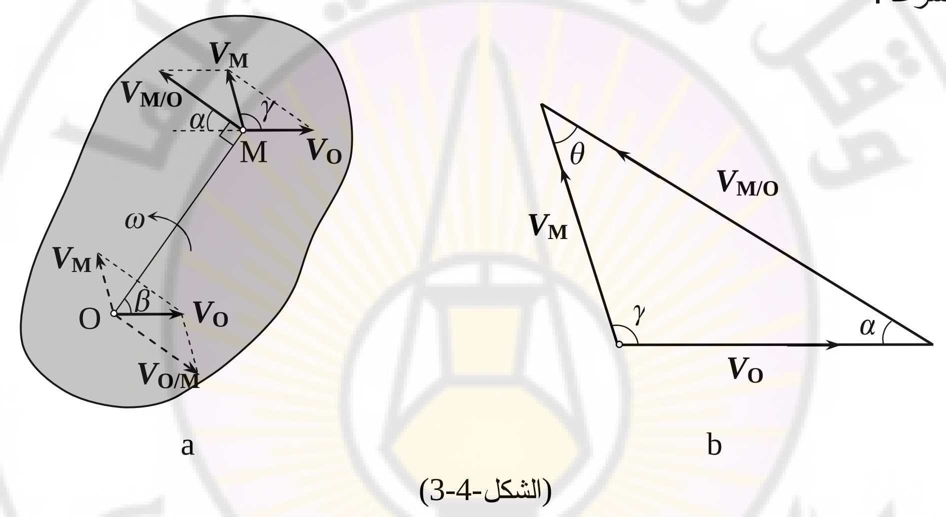
ومنه العلاقة (4-6) تكتب بالشكل التالي:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{O}} + \boldsymbol{V}_{\mathbf{M/O}} \tag{9-4}$$

إذن سرعة الجسيم M من المقطع العرضي هي محصلة متجهي سرعتين، سرعة القطب O في حركته بدلالة $O_1X_1Y_1$ ، وسرعة دوران الجسيم M حول القطب.

وهكذا فإن السرعة المطلقة (*Absolute Velocity*) $\boldsymbol{V_M}$ لأي جسيم M من جسيمات الجسم، تجمع هندسيا من سرعة $\boldsymbol{V_O}$ لأي نقطة مأخوذة كقطب مثل O ، وسرعة نسبية (*Relative Velocity*) للجسيم عند دورانه مع الجسم حول محور مار من القطب عمودياً على المستوي الثابت.

ويعين اتجاه السرعة $\boldsymbol{V_M}$ برسم متوازي الأضلاع كما هو مبين في (الشكل-4-3a)، أو رسم مضلع الأشعة وفق العلاقة (4-9) كما هو مبين في (الشكل-4-3b)، الذي يدعى مثلث السرعة.



(الشكل-4-3)

ويتم الحصول على قيمة السرعة لـــ $\boldsymbol{V_M}$ أو $\boldsymbol{V_{M/O}}$ ، إما بقياس الأطوال من مخطط السرعة، أو بالحل التحليلي بتطبيق علاقة لامي على مثلث السرعة.

$$\frac{V_O}{\sin q} = \frac{V_{M/O}}{\sin g} = \frac{V_M}{\sin a} \qquad (10\text{-}4)$$

وذلك بعد معرفة قيمة السرعة لـــ V_O وتعين الزوايا الداخلية لمثلث السرع θ , β , α هندسياً.

ومنه يمكن عَدُّ حركة المقطع S مركبة من حركتين:

الحركة الأولى وهي حركة انسحابية للمقطع S تتحرك بموجبها كل جسيمات المقطع حركة مماثلة لحركة القطب O ، وتتعين الحركة من المعادلتين الأولى والثانية من معادلات الحركة المستوية العامة للجسم الصلب (4-1)، ويكتسب كل جسيم M من المقطع S سرعة مسايرة للسرعة $\boldsymbol{V_O}$ تدعى بالسرعة الانسحابية للحركة.

الحركة الثانية وهي حركة دورانية للمقطع S حول محور عمودي على مستويه مَاْرٍّ من القطب O ، وتتعين هذه الحركة من المعادلة الثالثة من معادلات الحركة المستوية العامة للجسم الصلب (4-1)، نرمز لسرعة هذه الحركة بـــ $\boldsymbol{V}_{\mathbf{M/O}}$ وهي تقابل السرعة الدورانية للحركة الدورانية للمقطع حول القطب O ، فهي إذن تمثل سرعة نسبية.
مع الانتباه بأن هاتين الحركتين تحدثان بآن واحد.

أما إذا اختير الجسيم M كقطب، فيمكن الحصول على السرعة المطلقة لــ O الموجودة في المقطع بتطبيق علاقة السرعة (4-7)، وذلك:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{O}} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{M}} + \boldsymbol{V}_{\mathbf{O/M}} \qquad (11\text{-}4)$$

ويبين على (الشكل-4-3a) بالخط المنقط التمثيل البياني لهذه المعادلة، ومن مقارنة مخططي السرعة للعلاقتين (4-9) و (4-11) في (الشكل-4-3a)، نلاحظ:

- أن السرع النسبية $\boldsymbol{V}_{\mathbf{M/O}}$ و $\boldsymbol{V}_{\mathbf{O/M}}$ لها نفس القيمة التي تساوي $\dot{\varphi}.\mathrm{OM}$ ، ولكن باتجاهين متعاكسين، وبالتالي فإن اتجاه السرع النسبية يعتمد على مكان اختيار القطب.
- أن السرعة الزاوية للمقطع العرضاني في حركته الدورانية حول القطب O ، تبقى ذاتها في حركته الدورانية حول الجسيم M ، وتمثل في كلا الحالتين معدلَ تغير الزاوية φ بالنسبة للزمن، بالتالي تكون السرعة الزاوية $(w = \dot{\varphi})$ للجسم الصلب في حركته المستوية العامة مستقلة عن موضع القطب.

وعليه فإن اختيار القطب يغير من المميزات الحركية للحركة الانسحابية، السرعة الخطية والتسارع الخطي وإلا لكانت الحركة انسحابية بحتة، ولا يغير من مميزات الحركة الدورانية، السرعة الزاوية والتسارع الزاوي، إلا أن كل ذلك لا يغير من قيمة واتجاه السرعة المطلقة لجسيمات الجسم.

3- المركز الآني للدوران *Instantaneous Centre of Rotation*

نعتمد على طريقة سهلة لتعيين سرعات جسيمات الجسم خلال الحركة المستوية العامة من مفهوم المركز الآني للدوران أو للسرعات، وهو تلك النقطة من نقاط المقطع S أو من خارجه التي تنعدم سرعتها المطلقة في لحظة زمنية معينة.

لو فرضنا O قطباً لكانت سرعة النقطة M التي تمثل جسيم من المقطع، هي:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{O}} + \boldsymbol{V}_{\mathbf{M/O}}$$

فالسرعة $\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}}$ كما ذكرنا هي في كل لحظة t هي محصلة سرعتين، $\boldsymbol{V}_{\mathbf{O}}$ وتقع في المستوي $O_1X_1Y_1$ و $\boldsymbol{V}_{\mathbf{M/O}}$ وهي تقع أيضاً في المستوي $O_1X_1Y_1$ وتعامد المستقيم OM ، فيمكن إذن أن تنعدم محصلة المتجهين في نقطة ما مثل M في المقطع S ، أو في امتداده في المستوي $O_1X_1Y_1$.

لتعيين إحداثي النقطة M التي تنعدم فيها السرعة في اللحظة t ، نحسب السرعة $\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}}$ بدلالة الجملة OXY المقيدة بالمقطع S ، ونفرض أن:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{O}} = p.\boldsymbol{i} + q.\boldsymbol{j}$$

حيث $p\,,\,q$ مسقطا سرعة القطب O في اللحظة t على المحورين OX و OY ، كذلك:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{M/O}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM} = -\dot{\varphi}.y.\boldsymbol{i} + \dot{\varphi}.x.\boldsymbol{j}$$

حيث $x\,,\,y$ احداثيات M بدلالة الجملة OXY ، وتنعدم $\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}}$ إذا تحققت العلاقة التالية:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}} = (p - \dot{\varphi}.y)\,\boldsymbol{i} + (q + \dot{\varphi}.x)\,\boldsymbol{j} = 0$$

أي أن:

$$p - \dot{\varphi}.y = 0 \qquad , \qquad q + \dot{\varphi}.x = 0$$

ومنه:

$$y = \frac{p}{\dot{\varphi}} \qquad , \qquad x = -\frac{q}{\dot{\varphi}} \tag{12-4}$$

حيث تعطي العلاقة (4-12) إحداثيتي النقطة M المعدومة السرعة، وذلك بدلالة الجملة OXY المقيدة بالمقطع S .

نحسب المسقطين $p\,,\,q$ بدلالة الجملة $O_1X_1Y_1$ ، لدينا:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{O}} = p.\boldsymbol{i} + q.\boldsymbol{j} = \dot{x}_{1O}.\boldsymbol{i}_{\mathbf{1}} + \dot{y}_{1O}.\boldsymbol{j}_{\mathbf{1}} \tag{13-4}$$

نسقط العلاقة (4-13) على المحور OX :

$$p\,(\boldsymbol{i}.\boldsymbol{i}) + q\,(\boldsymbol{j}.\boldsymbol{i}) = \dot{x}_{1O}(\boldsymbol{i}_{\mathbf{1}}.\boldsymbol{i}) + \dot{y}_{1O}(\boldsymbol{j}_{\mathbf{1}}.\boldsymbol{i})$$

ومنه:

$$p = \dot{x}_{1O}.\cos\varphi + \dot{y}_{1O}.\sin\varphi$$

وعلى المحور OY :

$$p\,(\boldsymbol{i}.\boldsymbol{j}) + q\,(\boldsymbol{j}.\boldsymbol{j}) = \dot{x}_{1O}(\boldsymbol{i}_{\mathbf{1}}.\boldsymbol{j}) + \dot{y}_{1O}(\boldsymbol{j}_{\mathbf{1}}.\boldsymbol{j})$$

ومنه:

$$q = -\dot{x}_{1O}.\sin\varphi + \dot{y}_{1O}.\cos\varphi$$

وبما أن φ, x_{1O}, y_{1O} تتحول مع الزمن، وبالتالي $\dot{\varphi}, p, q$ تتحول مع الزمن t ، وينجم عن ذلك أن إحداثيات النقطة M التي تنعدم فيها السرعة بدلالة الجملة المتحركة OXY ، والمعينة بالعلاقة (4-12) تتحول حيث توافق في كل لحظة t نقطة واحدة في المقطع S أو من امتداده تنعدم فيها السرعة.

نرمز لهذه النقطة بالحرف I للتمييز بينها وبين الجسيم M للمقطع، والتي كما سبق وذكرنا تبقى ثابتة بدلالة الجملة OXY المقيدة بالمقطع، وتدعى I بالمركز الآني للسرعة المعدومة (*Instantaneous Centre of Zero Velocity*).

في اللحظة t المذكورة إذا انتخبنا المركز I المعين بالعلاقة (4-12) قطباً للحركة، وعينا سرعة جسيمات المقطع S في هذه اللحظة بدلالة القطب I لكان:

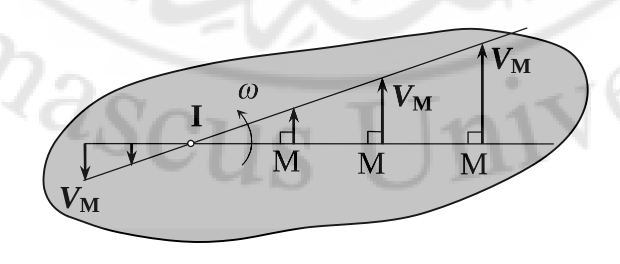
$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{I}} + \boldsymbol{V}_{\mathbf{M/I}} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{I}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{IM}$$

ولما كان ($\boldsymbol{V}_{\mathbf{I}} = 0$) في اللحظة المذكورة وجب أن يكون:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{IM} \qquad (14\text{-}4)$$

ومنه نستنتج أن الجسيم M يدور حول I ، بالتالي سرعات جسيمات المقطع S موزعة في كل لحظة زمنية، كما لو كانت حركة هذا المقطع العرضي دوراناً آنياً حول I ، ولهذا السبب يسمى I بالمركز الآني للدوران. أما المحور IZ العمودي على المقطع S ، والمار بالمركز I فيسمى بالمحور الآني للدوران (*Instantaneous Axis of Rotation*).

وتعطينا العلاقة (4-14) طريقة عملية لتعيين سرع مختلف جسيمات المقطع S في اللحظة t ، وذلك إذا علمنا معادلات الحركة المستوية للجسم (4-1) التي تساعد في حساب $\dot{\varphi}, p, q$ ، أي إلى تعيين الوضع الهندسي للمركز I في مستوي المقطع كما هو مبين في (الشكل-4-4).



(الشكل-4-4)

نصل المركز I إلى الجسيم M من المقطع S ، حيث يكون منحى $\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}}$ عمودياً على IM ، ويتجه في الجهة المباشرة حول $\boldsymbol{\Omega}$ ، أي حول الناظم على المستوي إذا كان $(\dot{\varphi}>0)$ في اللحظة t وطوله:

$$V_{\mathrm{M}} = \mathrm{IM}.|\dot{\varphi}| = \mathrm{IM}.w \qquad (15\text{-}4)$$

أي أن القيمة العددية للسرعة تتناسب مع بعد الجسيم M عن المركز I ، وعامل التناسب هو السرعة الزاوية $(\dot{\varphi}=w)$ كما هو مبين في (الشكل-4-4).

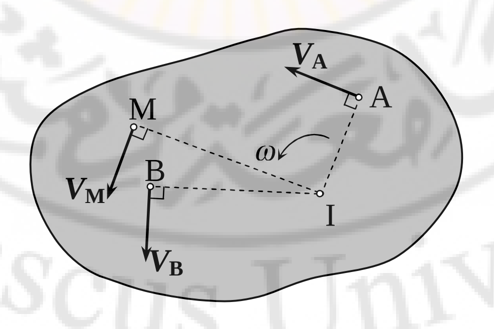
3-1- نتائج المركز الآني للدوران

إن النتائج الحسابية تقودنا إلى الاستنتاجات التالية:

- **تعيين المركز الآني للدوران بطريقة هندسية**

لتعيين المركز الآني للدوران أو المركز الآني للسرعات في لحظة ما بالطريقة الهندسية، يكفي أن نعلم منحيي سرعتي جسيمين فحسب من جسيمات المقطع في تلك اللحظة.

بالفعل إذا كانت النقطتان A و B تمثلان جسيمين من المقطع S ، وكان منحيا سرعتيهما $\boldsymbol{V}_{\mathbf{A}}$ و $\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}}$ في اللحظة t غير متوازيين، نرسم من A عموداً على منحى $\boldsymbol{V}_{\mathbf{A}}$ ، ومن B عموداً على منحى $\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}}$ ، فيتقاطع العمودان في النقطة I التي هي المركز الآني للدوران في اللحظة t ، كما هو مبين في (الشكل4-5).



(الشكل-4-5)

وهذا ناتج من العلاقتين:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{IA} \quad \text{و} \quad \boldsymbol{V}_{\mathbf{B}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{IB}$$

حيث في اللحظة t يكون IA نصف قطر دوران A حول I عمودية على $\boldsymbol{V}_{\mathbf{A}}$ ، و IB نصف قطر دوران B حول I عمودية على $\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}}$ ، ومنه نحصل على المركز I من تقاطع IA مع IB .

نلاحظ من (الشكل-4-5) وتبعاً للخاصة الأساسية لسرع جسيمات الجسم الصلب أن مسقطي سرعتي جسيمين منه على المستقيم الواصل بينهما متساويان، مما يدل على أن المتجه $\boldsymbol{V}_{\mathbf{I}}$ معدوم، حيث يجب أن يكون عمودياً في الوقت نفسه على كل من IA لأن $(\boldsymbol{V}_{\mathbf{A}} \perp \mathbf{IA})$ و IB لأن $(\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}} \perp \mathbf{IB})$ وهذا غير ممكن.

- **تعيين السرعة الزاوية لدوران المقطع**

لتعيين السرعة الزاوية لدوران المقطع في أي لحظة زمنية يكفي أن نعلم متجه سرعة جسيم ما في المقطع العرضاني، اضافة إلى منحيي سرعتي جسيمين.

بالفعل لتكن $\boldsymbol{V}_{\mathbf{A}}$ متجه سرعة النقطة A التي تمثل الجسيم معلومة، فبعد الحصول هندسياً على المركز الآني للدوران I ، يمكن الحصول على قيمة السرعة الزاوية من نسبة القيمة العددية لسرعة V_{A} على بعدها عن المركز اللحظي للدوران، أي:

$$w = \boldsymbol{V}_{\mathbf{A}} / \mathrm{IA}$$

ومن اتجاه دوران المتجه $\boldsymbol{V}_{\mathbf{A}}$ حول I نحصل على اتجاه دوران السرعة الزاوية للجسم، الذي يمثل باتجاه دوران المقطع حول I .

- **تعيين سرع جسيمات المقطع**

لتعيين سرع جسيمات المقطع في أي لحظة زمنية يكفي أن نعلم السرعة الزاوية، اضافة إلى منحيي سرعتي جسيمين.

بالفعل لتكن ω السرعة الزاوية لدوران الجسم معلومة، فبعد الحصول هندسياً على المركز الآني للدوران I ، يمكن الحصول على سرعة أي جسيم M من جسيمات المقطع من علاقة نسب القيم العددية لسرع هذه الجسيمات إلى بعدهم عن المركز اللحظي للدوران التي تساوي السرعة الزاوية لدوران المقطع حول المركز الآني، أي:

$$\frac{\boldsymbol{V}_{\mathbf{A}}}{\mathrm{IA}} = \frac{\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}}}{\mathrm{IB}} = \frac{\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}}}{\mathrm{IM}} = w \qquad (16\text{-}4)$$

باشتقاق العلاقة (4-16) بدلالة الزمن، حالة كان بعد جسيمات المقطع عن المركز اللحظي ثابتاً، نحصل على:

$$\frac{\boldsymbol{A}_{\mathrm{A}}^{t}}{\mathrm{IA}}=\frac{\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{t}}{\mathrm{IB}}=\frac{\boldsymbol{A}_{\mathrm{M}}^{t}}{\mathrm{IM}}=e \qquad (17\text{-}4)$$

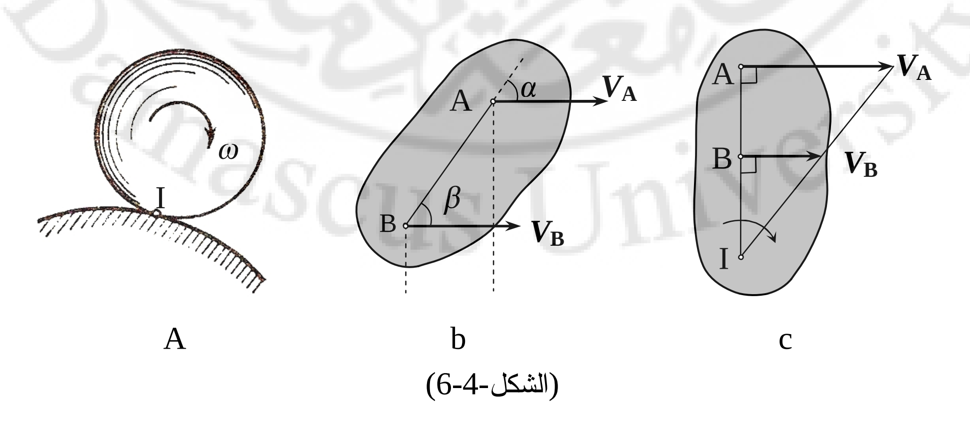
وبمكاملة العلاقة (4-16) بدلالة الزمن، حالة كان بعد جسيمات المقطع عن المركز اللحظي ثابتاً، نحصل على:

$$\frac{\Delta \mathrm{A}}{\mathrm{IA}}=\frac{\Delta \mathrm{B}}{\mathrm{IB}}=\frac{\Delta \mathrm{M}}{\mathrm{IM}}=\Delta j \qquad (18\text{-}4)$$

نستنتج من العلاقات (4-16) و (4-17) و (4-18)، أنه إذا كان بعد جسيمات المقطع العرضاني عن المركز اللحظي للدوران ثابتاً، فإن انتقال هذه الجسيمات، والسرعات الخطية، والتسارعات المماسية لها، تتناسب طرداً مع بعدها عن المركز اللحظي للدوران، وثابت التناسب هو الانتقال الزاوي، والسرعة الزاوية، والتسارع الزاوي، على التتالي.

3-2- حالات خاصة لتعيين المركز الآني للدوران

- إذا تمت الحركة المستوية عن طريق دحرجة جسم أسطواني على سطح أسطواني آخر ثابت دون انزلاق، فإن نقطة التلامس I بين الأسطوانتين للمقطع المبين في (الشكل-4-6a)، هي في حالة سكون وقتي في تلك اللحظة الزمنية المعطاة، فالسرعة تساوي الصفر، وبالتالي فإن هذه النقطة تمثل المركز الآني للدوران، لأنه يجب أن تكون لنقطتي تلامس الجسمين سرعتان متساويتان عند عدم وجود انزلاق يؤدي إلى انعدام السرعة النسبية بين نقطتي تلامس الجسمين، وحيث إن الجسم الثاني ثابت فإن سرعة نقطة التلامس تساوي الصفر.



(الشكل-4-6)

• إذا كانت سرعتا الجسيمين A و B في المقطع المبين في (الشكل-4-6b) متوازيتين والمستقيم AB ليس عمودياً عليهما، فإن المركز الآني للدوران يقع في اللانهاية، وتكون سرعات كل الجسيمات موازية لبعضها، ومن خاصية مساقط السرعات ينتج:

$$V_A . \cos a = V_B . \cos b$$

وبما أن:

$$a = b \quad \Rightarrow \quad V_A = V_B$$

وبالتالي تكون سرعات جميع جسيمات الجسم في لحظة زمنية معينة متساوية في هذه الحالة مقداراً واتجاهاً، وتسمى هذه الحالة في حركة الجسم بالحركة الانسحابية، وتكون السرعة الزاوية معدومة.

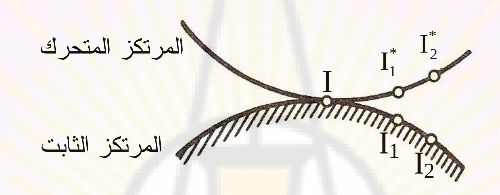
• إذا كانت سرعتا الجسيمين A و B في المقطع المبين في (الشكل-4-6c) متوازيتين والمستقيم AB عمودياً عليهما، فإن المركز الآني للدوران يتحدد بالطريقة كما في الشكل، وفي هذه اللحظة على عكس الحالات السابقة، لابد لتعيين المركز الآني للدوران من معرفة ليس منحني سرعتي الجسيمين فحسب، وإنما معرفة مقداريهما V_A و V_B أيضاً.

4- المنحنيات التدحرجية

نستنتج مما سبق أنه في الحركة المستوية العامة لجسم، تكون سرعات جسيمات المقطع العرضاني S له، موزعة في كل لحظة زمنية كما لو كانت حركة هذا المقطع عبارة عن دوران حول المركز I ، لهذا السبب يدعى I بالمركز الآني للدوران، والمحور IZ العمودي على المقطع S والمار بالمركز I ، فيدعى بالمحور الآني لدوران الجسم المتحرك حركة مستوية عامة.

يختلف المحور الآني (أو المركز الآني) للدوران عن المحور الثابت (أو المركز الثابت)، بأنه يغيّر وضعه طوال الوقت ما دام الجسم يتحرك، لذا فالحركة المستوية العامة لجسم هي عبارة عن حركات دورانية بسيطة متتابعة حول محاور آنية للدوران.

وخلال حركة المقطع S يغير المركز اللحظي للدوران I موضعه باستمرار، سواء في المستوي الثابت OXY أو في نفس المقطع S في داخل الجسم، ويسمى المحل الهندسي للمراكز الآنية للدوران في المستوي الثابت بالمرتكز الثابت أو مرتكز الفراغ، (*Space Centrode*)، أما المحل الهندسي لهذه المراكز في مستوٍ متصل بالمقطع S ومتحرك معه فيسمى بالمرتكز المتحرك أو مرتكز الجسم (*Body Centrode*) كما هو مبين في (الشكل-4-7)، وفي أي لحظة زمنية t يمس المرتكزان أحدهما الآخر في النقطة I التي تكون في هذه اللحظة المركز اللحظي للدوران، ولا يمكن أن يتقاطع المرتكزان، وإلا لوجد أكثر من مركز لحظي وهذا غير ممكن، وعندما يتحرك المقطع العرضي يبدو كما لو كان المرتكز المتحرك يتدحرج على المرتكز الثابت دون انزلاق عند الحركة المستوية.



(الشكل-4-7)

من السهل ملاحظة أن المستوي الثابت في (الشكل-4-7) هو المرتكز الثابت للجسم الأسطواني المتدحرج، والذي يعد المرتكز المتحرك، ويتم الحصول على حركة الجسم الأسطواني بدحرجة المرتكز المتحرك على المرتكز الثابت دون انزلاق. ويمكن تعيين المرتكزات بطريقتين هندسية وتحليلية:

الطريقة الهندسية

يعين المركز الآني للسرعة بالإنشاء للجسم المتحرك عند وضع ما، ومن ثم يعين المحل الهندسي لمراكز السرعة الآنية بدلالة جملتي المحاور الثابتة والمتحركة.

الطريقة التحليلية

تعتمد هذه الطريقة على العلاقات التي تعين إحداثيات المركز الآني للسرعة، فتكون إحداثيات I في المحاور المتحركة محددة بالمعادلتين (4-12)، حيث الطرف الأيمن يحوي $\dot{x}, p, q$ وهي عبارة عن توابع للزمن عبر الوسطاء φ , x_{1O} , y_{1O} التي تتحول مع الزمن، ونحصل بعد معرفة معادلات الحركة (4-1) على:

$$y_{I} = \frac{p}{\dot\varphi} = \frac{\dot x_{1O}.\cos\varphi + \dot y_{1O}.\sin\varphi}{\dot\varphi}$$

$$x_{I} = -\frac{q}{\dot\varphi} = \frac{\dot x_{1O}.\sin\varphi - \dot y_{1O}.\cos\varphi}{\dot\varphi} \qquad (19\text{-}4)$$

وبحل المعادلتين واستثناء الزمن، نحصل على معادلة المرتكز المتحرك.

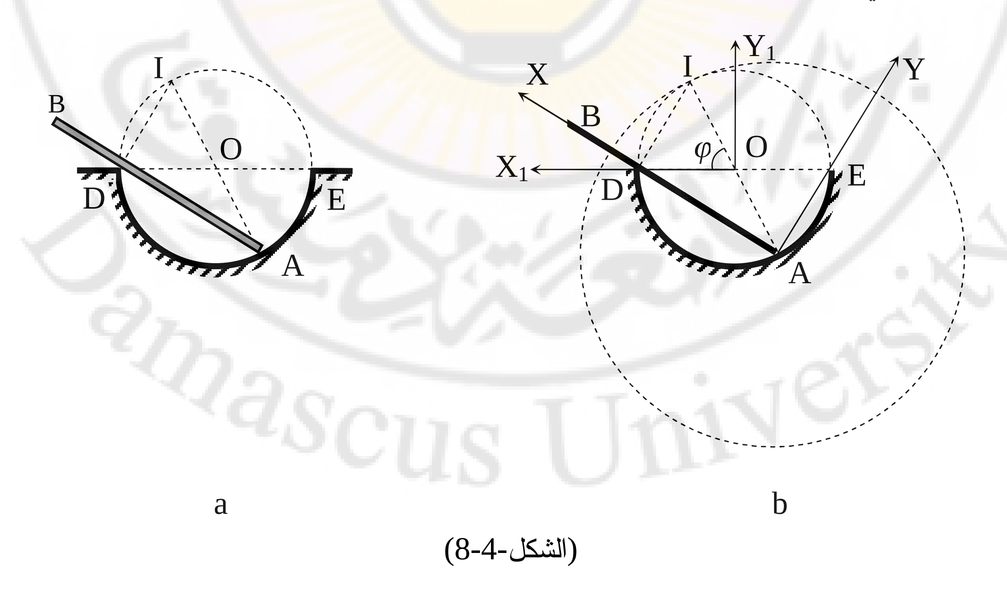
وتنتج احداثيات المركز الآني للسرعة I في المحاور الثابتة، بتطبيق المعادلتين (4-5) عليه بعد أن نجعلهما مساوية الصفر، ونحصل بعد معرفة معادلات الحركة (4-1) على:

$$x_{1I} = x_{1O} - \frac{\dot y_{1O}}{\dot\varphi} \quad , \quad y_{1I} = y_{1O} + \frac{\dot x_{1O}}{\dot\varphi} \qquad (20\text{-}4)$$

وبحل المعادلتين واستثناء الزمن، نحصل على معادلة المرتكز الثابت.

تطبيق

يتحرك القضيب AB في المستوي الرأسي، حيث طرفه A ينزلق على نصف الدائرة EAD التي نصف قطرها يساوي إلى r ، ويبقى مستنداً دائما على الحافة D كما هو مبين في (الشكل-4-8a). المطلوب إيجاد المرتكز الثابت والمرتكز المتحرك للقضيب.



(الشكل-4-8)

نعين المركز الآني I للقضيب في وضع ما، حيث يتحرك الطرف A على نصف الدائرة، ويكون منحى واتجاه سرعته V_A وفق المماس لنصف الدائرة في A ، وبما أن القضيب ينزلق على الحافة D ولا ينفك عنها، فيكون منحى واتجاه سرعة نقطته المستندة على الحافة D منطبقاً على محور القضيب AB .

من معرفة منحيي سرعتي النقطتين A و D نعين المركز الآني I بإقامة عمودين من A و D على منحيي السرعتين، وعليه يقع I على محيط الدائرة DAE ، الذي يمثل المحل الهندسي له والذي هو عبارة عن المرتكز الثابت.

كما نلاحظ من الشكل أن (AI = 2 OA)، وبالتالي ترسم النقطة I حول النقطة المتحركة A دائرة نصف قطرها يساوي ضعف نصف قطر الدائرة EAD ، هذه الدائرة عبارة عن المرتكز المتحرك.

للحصول على معادلات المرتكزات، نختار الجملة الأولى بمحاور ثابتة OX_1Y_1 ، والجملة الثانية متحركة AXY مقيدة بالقضيب AB كما هو مبين في (الشكل-4-8b)، فتكون إحداثيات I في المحاور الثابتة، هي:

$$x_{1I} = r.\cos j \qquad , \qquad y_{1I} = r.\sin j$$

وبالتالي تكون معادلة المرتكز الثابت:

$$x_{1I}^2 + y_{1I}^2 = r^2$$

أما إحداثيات I في المحاور المتحركة، فهي:

$$x_I = 2r.\cos(j\ /2) \qquad , \qquad y_I = 2r.\sin(j\ /2)$$

وبالتالي تكون معادلة المرتكز المتحرك:

$$x_I^2 + y_I^2 = 4r^2$$

5- مخطط السرعات *Velocity Diagram*

يمكن تعيين سرعة جسيم ما M في المقطع *S* تخطيطياً، بإنشاء مخطط السرعات، وذلك بأن ننشئ بدءاً من نقطة ما O مختارة متجهات السرعة لجسيمات الجسم.

لتكن $\boldsymbol{V}_{\mathbf{A}}$ و $\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}}$ و $\boldsymbol{V}_{\mathbf{C}}$ سرع النقاط A و B و C الممثلة لثلاثة جسيمات من المقطع الموضح في (الشكل-4-9a)، ننشئ بدءاً من النقطة O المختارة وبمقياس معين المتجهات:

$$\mathbf{O}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{A}} \quad , \quad \mathbf{O}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{B}} \quad , \quad \mathbf{O}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{C}}$$

الموضحة في (الشكل-4-9b)، وباعتبار A قطباً يكون لدينا:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{A}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{AB} \tag{21-4}$$

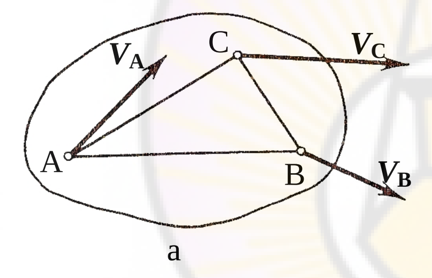
$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{C}} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{A}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{AC} \tag{22-4}$$

بالطرح نحصل على:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}} - \boldsymbol{V}_{\mathbf{C}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{AB} - \mathbf{AC}) = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{CB} \tag{23-4}$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}} - \boldsymbol{V}_{\mathbf{C}} = \mathbf{O}\boldsymbol{b} - \mathbf{O}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{cb} \tag{24-4}$$



a

O a b c

b

(الشكل-4-9)

من العلاقتين (4-23) و (4-24) نجد:

$$\boldsymbol{cb} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{CB} \tag{25-4}$$

اذن المتجه $\boldsymbol{cb}$ في مثلث السرع يعامد المتجه $\mathbf{CB}$ من المقطع، وأيضاً بنفس الطريقة نحصل:

$$\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{AB} \tag{26-4}$$

$$\boldsymbol{ca} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{CA} \tag{27-4}$$

كذلك يمكن أن نكتب من (4-25) و (4-26) و (4-27) أن:

$$cb = w.\mathrm{CB} \quad , \quad ca = w.\mathrm{CA} \quad , \quad ab = w.\mathrm{AB}$$

فالمثلث abc في مثلث السرعات يشابه المثلث ABC من المقطع العرضاني، وأضلاعه تعامد على الترتيب أضلاع المثلث ABC في اتجاه دوري، ومنه نستنتج أن:

$$\frac{cb}{\mathrm{CB}} = \frac{ca}{\mathrm{CA}} = \frac{ab}{\mathrm{AB}} = w \tag{28-4}$$

وأيضاً

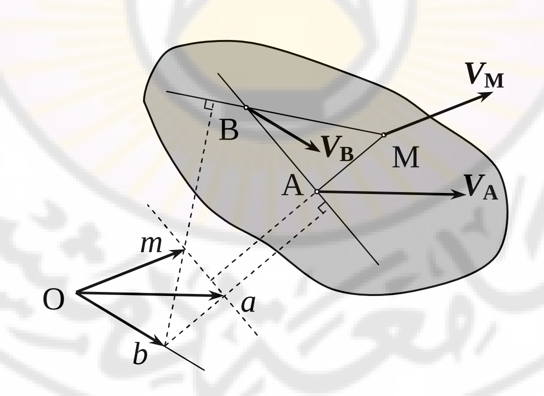
$$cb \perp CB \quad , \quad ca \perp CA \quad , \quad ab \perp AB \qquad (29\text{-}4)$$

فالعلاقتان (4-28) و (4-29) تساعدان في انشاء مخطط السرعة، وفي تعيين سرعة أي جسيم في المقطع، إذا علمنا منحى واتجاه وقيمة سرعة أي جسيم من المقطع، ومنحى سرعة جسيم ثانٍ B من هذا المقطع، ومتى أنشأنا مخطط السرعات أمكن حساب السرعة الزاوية من العلاقة (4-28).

يمكن إنشاء مخطط السرعة لمجموعة أجسام تتحرك حركة مستوية، ومتصلة مع بعضها حيث تُكَون تركيبة آلية، ويكون مخطط السرعة كمجموع مخططات سرعات الأجزاء المكونة للتركيبة الآلية.

تطبيق

إذا علم قيمة ومنحى واتجاه سرعة $\boldsymbol{V_A}$ لجسيم A من مقطع يتحرك حركة مستوية عامة، ومنحى سرعة $\boldsymbol{V_B}$ لجسيم B من نفس المقطع، عين تخطيطياً القيمة العددية لسرعة الجسيم B ، وسرعة جسيم ما M من المقطع.



(الشكل-4-10)

من نقطة اختيارية O ننشئ المتجه ($\boldsymbol{Oa} = \boldsymbol{V_A}$)، ثم ننشئ أيضاً من O مستقيماً يوازي منحى $\boldsymbol{V_B}$ كما هو مبين في (الشكل-4-10)، ومن a ننشئ مستقيماً يعامد AB يلاقي المستقيم الموازي لمنحى $\boldsymbol{V_B}$ في النقطة b ، ومنه الطول Ob يمثل القيمة العددية للسرعة $\boldsymbol{V_B}$.

ولتعيين سرعة الجسيم M من المقطع، ننشئ من a مستقيماً am يعامد AM من جهة دوران $\boldsymbol{ab}$ حول AB ، أما الطول am فيمكن تحديده بالعلاقة:

$$\frac{am}{\mathrm{AM}}=\frac{ab}{\mathrm{AB}}=w$$

كما يمكن إنشاء m هندسياً، بأن نرسم من b مستقيماً bm يعامد BM يتلاقى مع المستقيم am في النقطة m المطلوبة، والمتجه $\mathbf{O}\boldsymbol{m}$ يساير سرعة الجسيم M أي $\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}}$.

6- تسارع جسيمات مستوي المقطع العرضاني

إن دراسة التسارع هي تماماً كدراسة السرعة، أي أن تسارع جسيم M من جسيمات الجسم المتحرك حركة مستوية يتركب من تسارعي حركتيه الانسحابية والدورانية.

باشتقاق العلاقة (4-9) بدلالة الزمن مع أن السرعة النسبية $\boldsymbol{V}_{\mathbf{M/O}}$ تمثل سرعة دوران الجسيم M حول القطب، فمشتقها يمثل إذن تسارع الجسيم M في دورانه حول القطب O وبالتالي نحصل على:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{M}}=\boldsymbol{A}_{\mathbf{O}}+\boldsymbol{A}_{\mathbf{M/O}} \qquad (30\text{-}4)$$

حيث $\boldsymbol{A}_{\mathbf{M}}$ تمثل التسارع المطلق (*Absolute Acceleration*) ويساوي الجمع الشعاعي كما هو مبين في (الشكل-4-11a) لمتجهي تسارعين هما:

- تسارع $\boldsymbol{A}_{\mathbf{O}}$ الموافق لحركة المقطع العرضي الانسحابية مع القطب O .
- التسارع النسبي $\boldsymbol{A}_{\mathbf{M/O}}$ (*Relative Acceleration*) الموافق لحركة المقطع العرضي الدورانية حول القطب، ووفقا للمعادلة (3-30) تكون قيمته العددية:

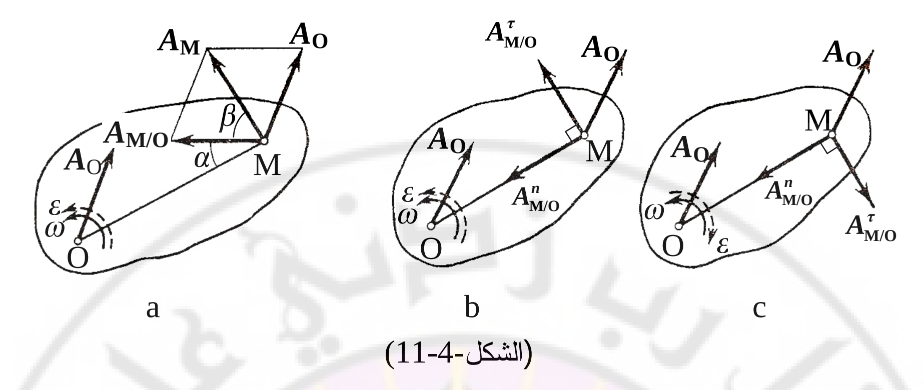
$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{M/O}}=\mathrm{OM}[w^4+e^2]^{1/2} \qquad (31\text{-}4)$$

حيث ω السرعة الزاوية و ε التسارع الزاوي للجسم.

ووفقاً للمعادلة (3-31) يميل متجه التسارع النسبي عن المستقيم OM بالزاوية α ، والتي تعين بالعلاقة:

$$a=\arctan\frac{|e|}{w^2} \qquad (32\text{-}4)$$

ولما كان ω و ε مشتركين في لحظة معينة t لجميع جسيمات الجسم الصلب، فمتجه التسارع النسبي يصنع زوايا متساوية α بالنسبة لجميع الجسيمات.



(الشكل-4-11)

وهكذا فإن تسارع أي جسيم M من جسيمات الجسم تجمع هندسياً من تسارع جسيم آخر مأخوذ كقطب وتسارع الجسيم M في أثناء دورانه مع الجسم حول هذا القطب، ويعين مقدار تسارع $\boldsymbol{A}_{\mathbf{M}}$ واتجاهه برسم متوازي الأضلاع الخاص بها كما هو مبين في (الشكل-4-11a).

غير أن الإنشاء الهندسي لــ $\boldsymbol{A}_{\mathbf{M}}$ بطريقة متوازي الأضلاع المذكورة على (الشكل-4-11a) عملية معقدة، إذ تحتاج إلى تعيين الزاوية α وبالتالي الزاوية β بين $\boldsymbol{A}_{\mathbf{M}}$ و $\boldsymbol{A}_{\mathbf{M/O}}$. لذا من الأفضل في حل المسائل تحليل متجه التسارع النسبي $\boldsymbol{A}_{\mathbf{M/O}}$ في مستوي المقطع إلى:

- تسارع مماسي $\boldsymbol{A}^{\tau}_{\mathbf{M/O}}$ يعامد OM ويتجه باتجاه دوران ε ، أي باتجاه الحركة إذا كان ($\varepsilon \,.\, \omega > 0$) كما هو مبين في (الشكل-4-11b) ويعاكس الحركة إذا كان ($\varepsilon \,.\, \omega < 0$) كما هو مبين في (الشكل-4-11c)، وقيمته العددية:

$$\boldsymbol{A}^{\tau}_{\mathbf{M/O}} = e\,.\mathrm{OM}$$

- تسارع ناظمي $\boldsymbol{A}^{n}_{\mathbf{M/O}}$ يتجه من M إلى O دوماً وقيمته العددية:

$$\boldsymbol{A}^{n}_{\mathbf{M/O}} = w^2\,.\mathrm{OM}$$

ويكون بالتالي:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{M}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{O}} + \boldsymbol{A}^{n}_{\mathbf{M/O}} + \boldsymbol{A}^{\tau}_{\mathbf{M/O}} \qquad (33\text{-}4)$$

وتجمع المتجهات الثلاث جمعاً هندسياً في M .

وإذا لم تكن حركة القطب حركة مستقيمة، فإن التسارع $\boldsymbol{A}_{\mathbf{O}}$ للقطب سيتألف من مركبتين أيضاً ناظمية ومماسية ويمكن أن نكتب:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{M}} = \boldsymbol{A}^{n}_{\mathbf{O}} + \boldsymbol{A}^{\tau}_{\mathbf{O}} + \boldsymbol{A}^{n}_{\mathbf{M/O}} + \boldsymbol{A}^{\tau}_{\mathbf{M/O}} \qquad (34\text{-}4)$$

كذلك إذا كان مسار الجسيم M منحنياً، عندئذ يجب تحليل التسارع $\boldsymbol{A}_{\mathbf{M}}$ إلى مركباتها المماسية والناظمية ويتضمن عندئذ حل المسألة ستة متجهات مختلفة:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{M}}^{n} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{M}}^{\tau} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{O}}^{n} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{O}}^{\tau} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{M/O}}^{n} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{M/O}}^{\tau} \qquad (35\text{-}4)$$

يفضل في حل المسائل رسم مضلع التسارعات للعلاقات السابقة وذلك لتعيين الاتجاهات المجهولة لبعض متجهات التسارع وخاصة المركبات المماسية منها.

كما أن إسقاط علاقات التسارع على محورين متعامدين بالاستعانة بمضلع التسارعات، يمكننا من حساب مجهولين يكونان في أغلب الأحيان تسارع الجسيم المادي M ، والتسارع الزاوي لدوران M حول O .

تحتوي معظم الآلات الميكانيكية والتركيبات الآلية على عدة أجزاء متحركة، وتكون أغلب هذه الأجزاء المتحركة متصلة مع بعضها بعضاً مفصليا بواسطة محور ربط، وتتم دراسة هذه التركيبات بدراسة كل جزء وحده كجسم صلب، متذكرين مع ذلك أن لمحور الاتصال الذي يربط جزأين مع بعض نفس السرعة المطلقة والتسارع المطلق.

وعندما تحتوي المسألة على أسنان متداخلة أي معشقة، فإننا نستعمل التحليل السابق نفسه، إذ يكون للأسنان المتداخلة أي المتماسة نفس السرعة المطلقة، وتكون مركبة التسارع المماسية لها نفس القيمة في مكان التماس، لكن لكل مسنن مركبته الناظمية الخاصة به، والتي تختلف عن المركبة الناظمية الأخرى.

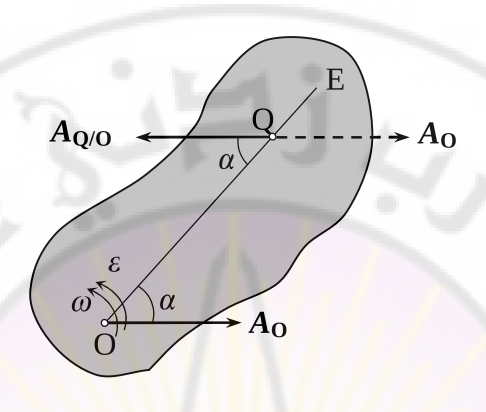
أما إذا احتوت التركيبة الآلية على أجزاء تنزلق على بعضها بعضاً فيجب أن يؤخذ في الحسبان عند إجراء الحسابات السرعة النسبية للأجزاء المتماسة.

7- المركز الآني للتسارع المعدوم

Instantaneous Centre of Zero Acceleration

إذا لم تكن الحركة المستوية للجسم الصلب حركة انسحابية، فإنه يوجد في المقطع العرضي S ، وفي كل لحظة زمنية t ، نقطة Q تمثل جسيم واقع في سطح مقطع الجسم S ، حيث يكون تسارعها معدوماً، وتسمى هذه النقطة بالمركز الآني للتسارع، وتعين تسارع الجسيمات المادية في المقطع كما لو أن المقطع العرضاني يدور لحظيا حول محور آني يمر من النقطة Q ، وعمودي على مستوي المقطع.

فإذا علمنا التسارع $\boldsymbol{A}_{\mathbf{O}}$ لنقطة اختيارية من المقطع، وقيمتي ω و ε في كل لحظة زمنية t ، أمكن تحديد وضع النقطة Q بالطريقة التالية المبين في (الشكل-4-12):



(الشكل-4-12)

- نحسب الزاوية α من العلاقة :

$$a = \arctan \frac{\left| A_{\mathrm{M/O}}^{t} \right|}{A_{\mathrm{M/O}}^{n}} = \arctan \frac{|e|}{w^{2}}$$

- نرسم من النقطة O المستقيم OE الذي يصنع مع التسارع $\boldsymbol{A}_{\mathbf{O}}$ الزاوية α ، حيث ينحرف المستقيم OE عن $\boldsymbol{A}_{\mathbf{O}}$ في اتجاه ε ، أي باتجاه الدوران إذا كانت الحركة متسارعة، وعكسية إذا كانت الحركة متباطئة.

- نأخذ على OE الطول OQ حيث:

$$\mathrm{OQ} = \frac{A_{\mathrm{O}}}{(e^{2} + w^{4})^{1/2}} \qquad (36\text{-}4)$$

فالنقطة Q هي المركز الآني للتسارع المطلوب، حيث فيها ينعدم التسارع، وللتأكيد على ذلك لدينا من العلاقات السابقة:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{O}} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{Q/O}} \qquad (37\text{-}4)$$

حيث القيمة العددية لـــ $\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q/O}}$:

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{Q/O}} = \mathrm{OQ}\,[w^{4} + e^{2}]^{1/2} \qquad (38\text{-}4)$$

نبدل(4-36) في (4-38) ينتج:

$$A_{\mathrm{Q/O}} = A_{\mathrm{O}}$$

وعلاوة على ذلك يجب أن يصنع المتجه $\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q/O}}$ زاوية α مع OQ ، وعليه يكون المتجه $\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q/O}}$ موازياً للمتجه $\boldsymbol{A}_{\mathbf{O}}$ ويعاكسه في الاتجاه أي:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q/O}} = -\boldsymbol{A}_{\mathbf{O}}$$

نبدل في (4-37) ينتج أن ($\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}} = 0$) وهو المطلوب.

1-7- نتائج المركز الآني للتسارع المعدوم

- **تعيين المركز الآني للتسارعات بطريقة هندسية**

لتعيين المركز اللحظي للتسارعات في لحظة بالطريقة الهندسية، يكفي أن نعلم مميزات الحركة الدورانية اضافة إلى تسارعي جسيمين.

بالفعل لتكن ω السرعة الزاوية و ε التسارع الزاوي لدوران الجسم معلومة، عندئذ نرسم المستقيمات المنشأة من نقطتين مثل A و B تمثلان جسيمين من المقطع، والصانعة مع تسارع النقطتين المعلومة الزاوية α المحددة بالعلاقة:

$$a = \arctan\frac{|e|}{w^2}$$

فنقطة تقاطع هذه المستقيمات تمثل المركز اللحظي للتسارعات.

إذا كانت ($\varepsilon = 0$) فإن ($\alpha = 0$) ، وهذه حالة المستقيمات المتجهة وفقها تسارعات جميع جسيمات المقطع S في اللحظة الزمنية المفروضة، حيث تلتقي جميعها في نقطة واحدة هي المركز اللحظي للتسارع.

- **تعيين تسارعات جسيمات المقطع**

لتعيين تسارعات جسيمات المقطع في أي لحظة زمنية يكفي أن نعلم وضعية المركز الآني للتسارع، إضافة إلى مميزات الحركة الدورانية.

بالفعل إذا عددنا النقطة Q قطباً لحركة المقطع S ، فإن تسارع جسيم ما M من المقطع المذكور يعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{M}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{M/Q}}$$

وبما أن:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}} = 0$$

ومنه:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{M}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{M/Q}} \qquad (39\text{-}4)$$

وعليه يكون تسارع أي جسيم M من المقطع S مساوياً لتسارع هذا الجسيم في حركته الدائرية حول Q ، وبالتالي تصبح القيمة العددية للتسارع:

$$A_{\mathrm{M}} = \mathrm{QM}\,[w^4 + e^2]^{1/2} \tag{40-4}$$

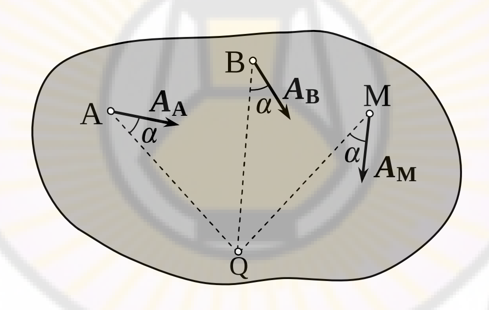
ومن ثم ، فإن تسارع أي جسيم من جسيمات الجسم يساوي تسارعه في اثناء الحركة الدورانية حول المركز اللحظي للتسارع Q ومنه ينتج:

$$\frac{|A_{\mathrm{M}}|}{\mathrm{QM}} = \frac{A_{\mathrm{A}}}{\mathrm{QA}} = \frac{A_{\mathrm{B}}}{\mathrm{QB}} = [w^4 + e^2]^{1/2} = \mathrm{const} \tag{41-4}$$

ويتناسب تسارع كل جسيم M من المقطع S مع بعد هذا الجسيم عن المركز الآني للتسارعات المعدوم، وثابت التناسب هو:

$$[w^4 + e^2]^{1/2}$$

استناداً إلى ذلك يمكن تعيين تسارعات بقية الجسيمات المادية في المقطع العرضي، ويبين (الشكل-4-13) صورة توزيع هذه التسارعات.



(الشكل-4-13)

ملاحظة

يمكن أن يقع المركز الآني للدوران لمقطع عرضي يتحرك حركة مستوية، إما على المقطع العرضي نفسه، أو على امتداده أي خارجه، فإذا توضع المركز I على المقطع العرضي نفسه، فتكون سرعة الجسيم المادي I_1 المنطبق على المركز الآني في اللحظة الزمنية المعطاة t مساوية الصفر في تلك اللحظة، ويكون المركز الآني للدوران صحيحاً فحسب من أجل تلك اللحظة المعطاة، وإن الجسيم المادي I_1 من المقطع العرضي المنطبق مع المركز الآني في الزمن t لن ينطبق بصورة عامة مع المركز الآني للدوران في الزمن $(t + \Delta t)$، وبينما تكون سرعته معدومة في الزمن t فمن المحتمل أن تكون مختلفة عن

الصفر، وتكون لها قيمة في الزمن ($t + \Delta t$)، من ذلك نستنتج أن تسارع I لن يكون معدوماً، وبالتالي لا يمكن تعيين تسارعات مختلف الجسيمات المادية للمقطع العرضي بافتراض أنه يدور آنياً حول المركز I .

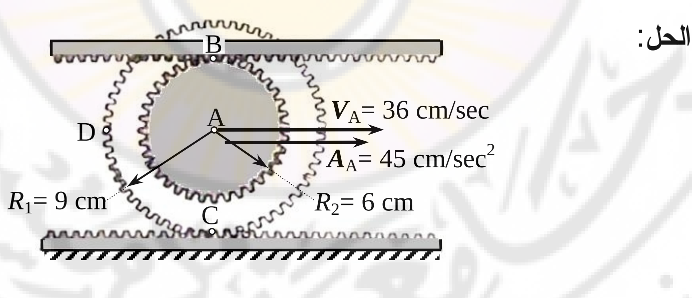
بالتالي يجب الأخذ بعين الاهتمام أن موضعي المركز الآني للسرعات I والمركز الآني للتسارع Q ، لا ينطبقان أبداً في اللحظة الزمنية المعطاة نفسها، وإنما ينطبقان فحسب في حالة دوران جسم حول محور ثابت.

مسألة -4-1

يتدحرج المسنن الثنائي الموضح في (الشكل-4-14) على المسنن المستقيم الثابت، فعندما كانت سرعة مركزه ($V_A = 36$ cm/sec→) نحو اليمين، وتسارع مركزه ($A_A = 45$ cm/sec^2 →) نحو اليمين أيضاً. المطلوب حساب:

1. السرعة الزاوية للمسنن.
2. سرعة المسنن المستقيم العلوي والنقطة D على المسنن.
3. التسارع الزاوي للمسنن.
4. تسارع النقاط B و C و D .

الحل:



(الشكل-4-14)

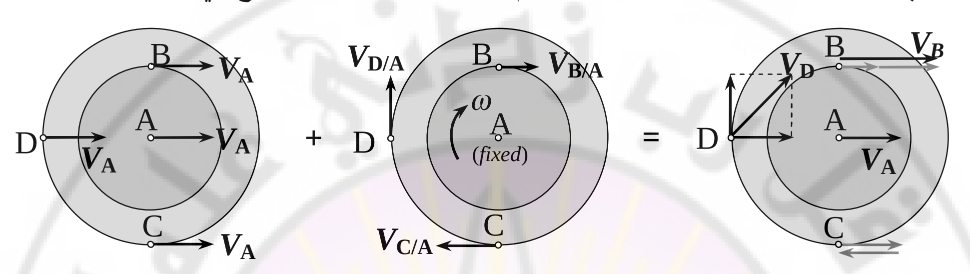
1. عندما يتدحرج المسنن على المسنن المستقيم السفلي، يتحرك المركز A ويقطع مسافة قدرها $2\pi.R_1$ لكل دورة يصنعها المسنن، وبذلك يكون احداثي المركز A لأي زاوية θ بالتقدير الدائري هو:

$$x_A = q\,.R_1 \qquad \Rightarrow \qquad V_A = w\,.R_1$$

ومنه:

$$w = V_A / R_1 = 36/9 = 4 \text{ rad/sec}$$

يمكن تحليل حركة المسنن الثنائي إلى حركة انسحابية بسرعة قطب مختار وليكن A ، ودوران حول القطب A ، ففي الحركة الانسحابية تتحرك جميع جسيمات المسنن بالسرعة V_A ، وفي الحركة الدورانية يتحرك كل جسيم حول القطب A بسرعة نسبية تساوي إلى جداء السرعة الزاوية ببعد الجسيم عن القطب كما هو موضح في (الشكل-4-15).



Translation Motion + *Rotation Motion* = *Rolling Motion*

(الشكل-4-15)

2. بما أن حركة المسنن العلوي المستقيم هي حركة انسحابية على مسار مستقيم، فسرعته تساوي سرعة نقطة منه ولتكن B ، ومنه سرعة المسنن المستقيم العلوي:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{A}} + \boldsymbol{V}_{\mathbf{B/A}}$$

حيث:

$$V_{\mathrm{A}} = 36\ \mathrm{cm/sec} \rightarrow \qquad , \qquad V_{\mathrm{B/A}} = R.w = 6 \times 4 = 24\ \mathrm{cm/sec} \rightarrow$$

وبما أن $\boldsymbol{V}_{\mathbf{A}}$ و $\boldsymbol{V}_{\mathbf{B/A}}$ باتجاه واحد وعلى نفس الاستقامة يكون:

$$V_{\mathrm{B}} = V_{\mathrm{A}} + V_{\mathrm{B/A}} = 36 + 24 = 60\ \mathrm{cm/sec} \rightarrow$$

أما سرعة النقطة D :

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{D}} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{A}} + \boldsymbol{V}_{\mathbf{D/A}}$$

حيث:

$$V_{\mathrm{A}} = 36\ \mathrm{cm/sec} \rightarrow \qquad , \qquad V_{\mathrm{D/A}} = R_1.w = 9 \times 4 = 36\ \mathrm{cm/sec} \uparrow$$

بما أن $(\boldsymbol{V}_{\mathbf{A}} \perp \boldsymbol{V}_{\mathbf{D/A}})$ ومنه:

$$V_{\mathrm{D}} = (V_{\mathrm{A}}^2 + V_{\mathrm{D/A}}^2)^{1/2} = 50.9\ \mathrm{m/sec}$$

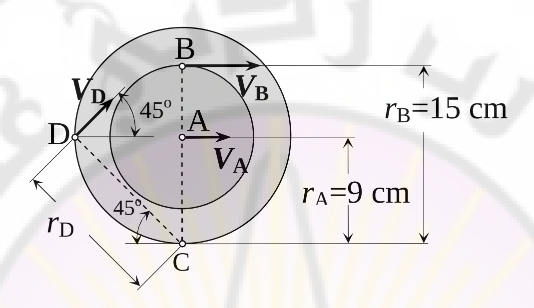
وزاوية ميله على الأفق:

$$a = \arctan \frac{V_{\mathrm{D/A}}}{V_{\mathrm{A}}} = \arctan 1 = 45^{\circ}$$

بما أن C تمثل المركز الآني للسرعة، فيمكن أيضاً دراسة سرعة B و D بدلالة المركز الآني C كما هو مبين في (الشكل-4-16)،.حيث:

$$V_{\mathrm{B}} = w.\mathrm{BC} = w.r_{\mathrm{B}} = 4\times 15 = 60\ \mathrm{cm/sec} \rightarrow$$

$$V_{\mathrm{D}} = w.\mathrm{DC} = w.r_{\mathrm{D}} = 4\times 9\sqrt{2} = 50.9\ \mathrm{cm/sec}\ \angle a$$



(الشكل-4-16)

3. بتفاضل علاقة السرعة بالنسبة للزمن يكون:

$$V_{\mathrm{A}} = w.R_1 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{V}_{\mathrm{A}} = A_{\mathrm{A}}^{t} = A_{\mathrm{A}} = e.R_1$$

ومنه:

$$e = A_{\mathrm{A}}^{t} / R_1 = 45/9 = 5\ \mathrm{rad/sec^2}$$

وبما أن اتجاه التسارع $\boldsymbol{A}_{\mathbf{A}}$ نحو اليمين فإن A تدور بتسارع زاوي قدره ε باتجاه دوران عقارب الساعة حول C ، بالتالي حركة المسنن هي حركة متسارعة لأن اتجاه ε باتجاه ω ، ولأن ($\varepsilon.\,\omega > 0$).

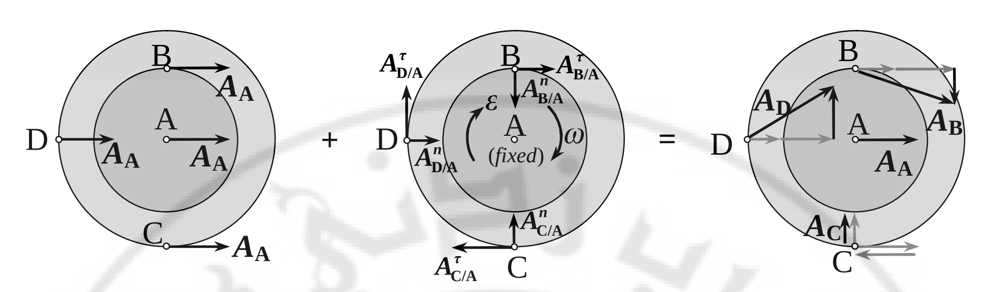
4. بما أن حركة المسنن الثنائي حركة انسحابية مع القطب A ودوران حوله كما في (الشكل-4-15)، فلحساب تسارع المسنن العلوي المتحرك الذي يساوي تسارع النقطة B ، لدينا:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{B}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{A}} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{B/A}}$$

الذي يكتب بالشكل:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{B}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{A}} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{B/A}}^{n} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{B/A}}^{\tau} \qquad (1)$$

والمتجهات هذه موضحة في (الشكل-4-17).



Translation Motion + *Rotation Motion* = *Rolling Motion*

(الشكل-4-17)

حيث:

$$A^{t}_{B/A} = e\,.R_2 = 6\times 5 = 30\ \text{cm}/\sec^2 \rightarrow$$
$$A^{n}_{B/A} = w^2\,.R_2 = 6(4)^2 = 96\ \text{cm}/\sec^2 \downarrow$$

برسم مخطط التسارع وفق العلاقة الشعاعية (1) والموضح في (الشكل-4-18a)، نحصل على:

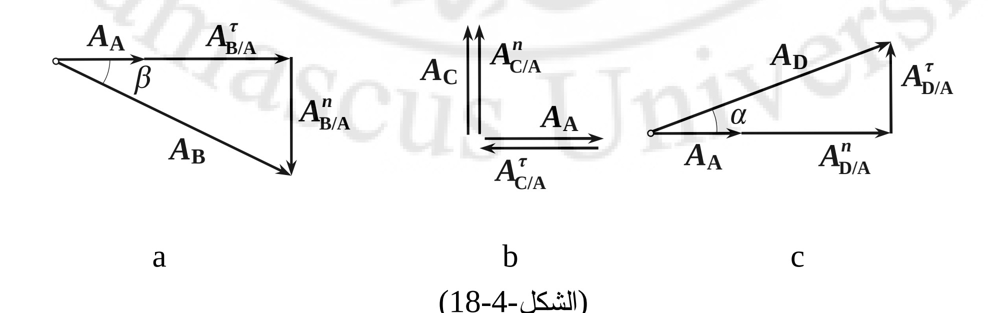
$$A_B = [(A_A + A^{t}_{B/A})^2 + (A^{n}_{B/A})^2]^{1/2} = 121.8\ \text{cm}/\sec^2$$
$$b = \arctan\,(A^{n}_{B/A})/(A_A + A^{t}_{B/A}) = 52^{\text{o}}$$

بالمثل يكون:

$$\boldsymbol{A}_C = \boldsymbol{A}_C + \boldsymbol{A}_{C/A} = \boldsymbol{A}_A + \boldsymbol{A}^{n}_{C/A} + \boldsymbol{A}^{\tau}_{C/A} \qquad (2)$$

وبما أنه من (الشكل-4-18b):

$$\boldsymbol{A}_A = -\boldsymbol{A}^{\tau}_{C/A} \quad \Rightarrow \quad A_A = A^{t}_{C/A} = e\,.R_1 = 45\ \text{cm}/\sec^2$$
$$\boldsymbol{A}_C = -\boldsymbol{A}^{n}_{C/A} \quad \Rightarrow \quad A_C = A^{n}_{C/A} = w^2\,.R_1 = 144\ \text{cm}/\sec^2$$



a b c

(الشكل-4-18)

كذلك:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{D}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{A}} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{D/A}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{A}} + \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}}_{\mathbf{D/A}} + \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{D/A}} \qquad (3)$$

برسم مخطط التسارع وفق العلاقة (3) والموضح في (الشكل-4-18c)، نحصل على:

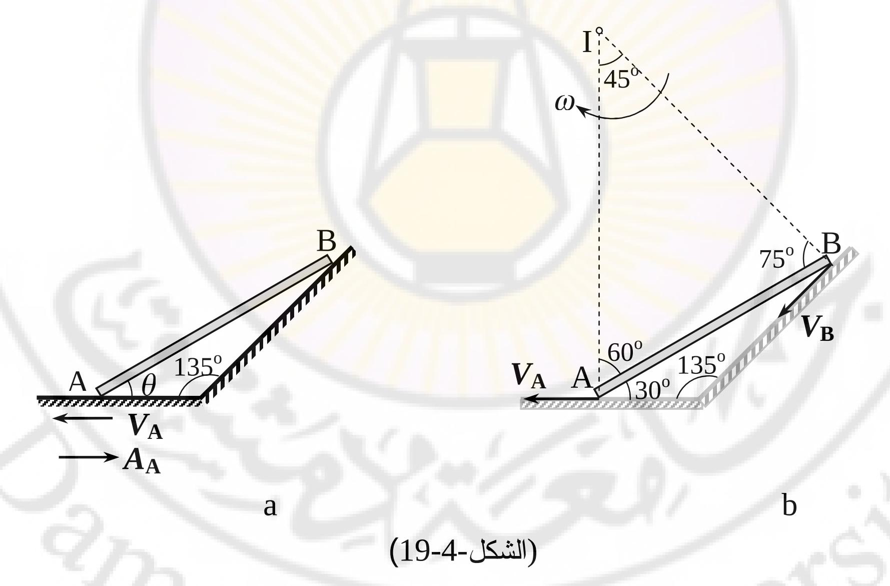
$$A_{\mathrm{D}} = [(A_{\mathrm{A}} + A^{n}_{\mathrm{D/A}})^2 + (A^{t}_{\mathrm{D/A}})^2]^{1/2} = 194 \text{ cm/sec}^2$$

$$g = \arctan\,(A^{t}_{\mathrm{D/A}})/(A_{\mathrm{A}} + A^{n}_{\mathrm{D/A}}) = 13.4^{\mathrm{o}}$$

مسألة -4-2

قضيب AB طوله (l = 8 m)، المبين في (الشكل-4-19a)، فإذا كانت سرعة الطرف A هي (V_{A}=12 m/sec) ومتجهة إلى اليسار، وتسارعه (A_{A}=12 m/sec^2) ومتجهة إلى اليمين. اوجد مميزات حركة القضيب عند الوضع (θ = 30$^{\mathrm{o}}$).

الحل:



(الشكل-4-19)

- دراسة السرعة

يتحرك القضيب AB حركة مستوية عامة، ولدراسة السرعة نختار الطرف A قطب أساس للحركة، فيكون:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{A}} + \boldsymbol{V}_{\mathbf{B/A}}$$

حيث:

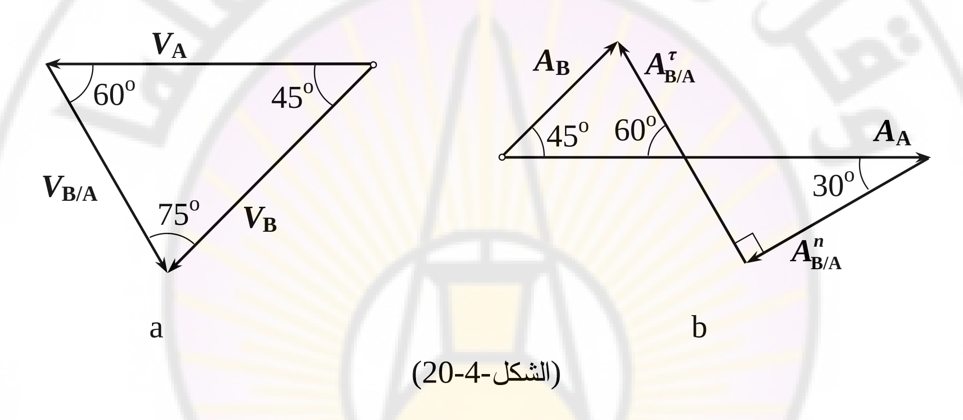
$\boldsymbol{V_B}$ معلوم المنحنى وقيمته العددية مجهولة.

$\boldsymbol{V_A}$ معلوم الاتجاه والقيمة العددية:

$$V_A = 12 \text{ m/sec} \leftarrow$$

$\boldsymbol{V_{B/A}}$ معلوم المنحني وقيمته العددية مجهولة.

بالتالي يمكن رسم مثلث السرعة وفق علاقة السرعة والموضح في (الشكل-4-20a)، حيث يتحدد اتجاه كل من $\boldsymbol{V_{B/A}}$ و $\boldsymbol{V_B}$ ، ولا يوجد أكثر من مجهولين وهما $V_{B/A}$ و V_B.



(الشكل-4-20)

وبتطبيق علاقة لامي لحساب أطوال أضلاع مثلث السرعة:

$$\frac{V_A}{\sin 75} = \frac{V_B}{\sin 60} = \frac{V_{B/A}}{\sin 45}$$

منه سرعة الطرف B :

$$V_B = \frac{\sin 60}{\sin 75} V_A = 10.76 \text{ m/sec}$$

والسرعة النسبية له بالنسبة للطرف الثاني A :

$$V_{B/A} = \frac{\sin 45}{\sin 75} V_A = 8.78 \text{ m/sec}$$

أما السرعة الزاوية للقضيب فتساوي:

$$w = \frac{V_{B/A}}{l} = 1.1 \text{ rad/sec}$$

ويتعين اتجاهها من اتجاه دوران متجه السرعة $\boldsymbol{V_{B/A}}$ حول الطرف A ، أي دوران الطرف B حول الطرف A ، وهو باتجاه حركة عقارب الساعة.

كما يمكن اعتبار حركة القضيب AB ممثلة بحركة دورانية آنية حول المركز اللحظي له I ، حيث منحى سرعة الطرف A يجب أن يكون أفقياً، بينما منحى سرعة الطرف B فهو منطبق على الجدار المائل، كما هو موضح في (الشكل-4-19b) ($\theta = 30^o$)، ومنه علاقة السرعة:

$$\frac{V_A}{IA} = \frac{V_B}{IB} = w$$

ويمكن تحديد موقع المركز اللحظي I ، باستخدام علاقة لامي في حساب الأطوال:

$$\frac{IB}{\sin 60} = \frac{IA}{\sin 75} = \frac{AB}{\sin 45}$$

منه:

$$IB = \frac{\sin 60}{\sin 45} l = 9.8 \text{ cm}$$

أيضاً:

$$IA = \frac{\sin 75}{\sin 45} l = 10.93 \text{ cm}$$

بالتعويض في علاقة السرعة نحصل على سرعة الطرف B :

$$V_B = \frac{IB}{IA} V_A = 10.76 \text{ cm/sec}$$

وفي علاقة السرعة الزاوية للقضيب:

$$w = \frac{V_A}{IA} = 1.1 \text{ rad/sec}$$

نلاحظ تساوي السرعة الخطية والزاوية بطريقتي الحساب، وخاصة السرعة الزاوية لدوران القضيب AB حول القطب A أو حول المركز اللحظي له I .

- دراسة التسارع

لدراسة التسارع نختار الطرف A قطباً أساسياً للحركة، فيكون:

$$\boldsymbol{A}_B = \boldsymbol{A}_A + \boldsymbol{A}_{B/A} = \boldsymbol{A}_A + \boldsymbol{A}^n_{B/A} + \boldsymbol{A}^\tau_{B/A}$$

حيث:

$\boldsymbol{A_B}$ معلوم المنحنى وقيمته العددية مجهولة.

$\boldsymbol{A_A}$ معلوم الاتجاه والقيمة العددية:

$$A_A = 15 \text{ m/sec}^2 \rightarrow$$

$\boldsymbol{A^n_{B/A}}$ يتجه من B إلى A وقيمته العددية:

$$A^n_{B/A} = w^2 . l = 8\,(1.1)^2 = 9.68 \text{ m/sec}^2$$

$\boldsymbol{A^t_{B/A}}$ منحاه متعامد على القضيب، وقيمته العددية مجهولة.

بالتالي يمكن رسم مضلع التسارع وفق علاقة التسارع والموضح في (الشكل-4-20b)، حيث يتحدد اتجاه كل من $\boldsymbol{A^t_{B/A}}$ و $\boldsymbol{A_B}$ ، ولا يوجد أكثر من مجهولين وهما $A^\tau_{B/A}$ و A_B ، وباسقاط علاقة التسارع على محورين متعامدين:

$$\rightarrow A_B .\cos 45 = A_A - A^n_{B/A} .\cos 30 - A^t_{B/A} .\cos 60$$

$$\uparrow \quad A_B .\sin 45 = -A^n_{B/A} .\sin 30 + A^t_{B/A} .\sin 60$$

نحصل بالتعويض على:

$$A_B = 3.43 \text{ m/sec}^2 \quad \angle 45^o \qquad , \qquad A^t_{B/A} = 8.39 \text{ m/sec}^2$$

نلاحظ أن القيمة العددية لـــ $A^\tau_{B/A}$ و A_B موجبة مما يدل على أن اتجاههما هو الاتجاه المفروض، كما هو مبين في (الشكل-4-20b).

أما التسارع الزاوي للقضيب:

$$A^t_{B/A} = e .l \qquad \Rightarrow \qquad e = A^t_{B/A} / l = 1.05 \text{ rad/sec}^2$$

واتجاهه هو باتجاه دوران $\boldsymbol{A^t_{B/A}}$ حول الطرف A أي بعكس حركة عقارب الساعة.

كان من الممكن معرفة اتجاه $\boldsymbol{A_B}$ و ε مباشرة بعد دراسة السرعة، وذلك لأن حركة القضيب متباطئة بسبب أن اتجاه $\boldsymbol{A_A}$ يعاكس اتجاه $\boldsymbol{V_A}$ ، بالتالي يكون اتجاه ε عكس اتجاه ω لأن ($\varepsilon . \omega < 0$)، واتجاه $\boldsymbol{A_B}$ يعاكس اتجاه $\boldsymbol{V_B}$.

مسألة 3-4-3

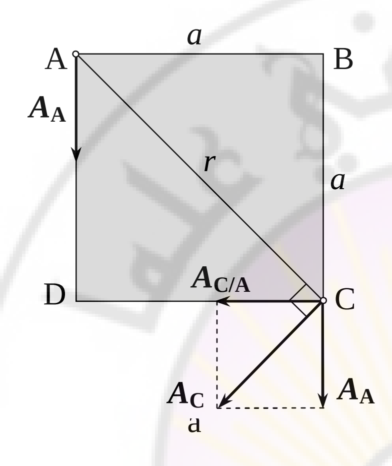
صفيحة مربعة ABCD طول ضلعها ($a = 0.1$ m)، تتحرك حركة مستوية عامة، في لحظة معينة كان تسارع كل من A و C هما:

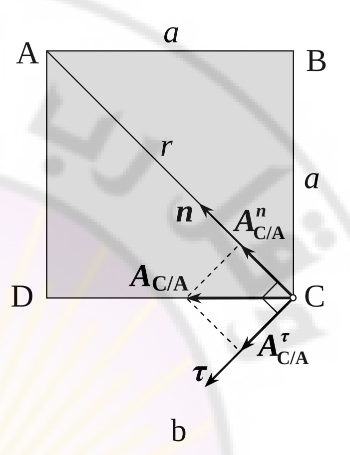
$$A_A = 2\sqrt{2} \text{ m/sec}^2 \downarrow \qquad , \qquad A_C = 4 \text{ m/sec}^2$$

حيث الاتجاهات موضحة على (الشكل-4-21a). المطلوب حساب:

1. السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للصفيحة.
2. المركز اللحظي للتسارعات.

الحل:





(الشكل-4-21)

1. نعلم أنه في الحركة المستوية العامة، يكون تسارع أي نقطة هو عبارة عن المجموع الهندسي لتسارع النقطة المعينة كقطب، وكذلك التسارع الناتج عن الحركة الدورانية لهذه النقطة حول القطب، وبما أن القطب هو A ، فيكون:

$$\boldsymbol{A}_\mathbf{C} = \boldsymbol{A}_\mathbf{A} + \boldsymbol{A}_\mathbf{C/A}$$

لإيجاد منحى $\boldsymbol{A}_\mathbf{C/A}$ نسقط العلاقة على محورين متعامدين كما هو مبين في (الشكل4-21a):

على المحور Y :

$$\uparrow \quad -A_\mathrm{C}.\cos 45 = -A_\mathrm{A} + (A_\mathrm{C/A})_\mathrm{Y}$$

بالتعويض:

$$(A_\mathrm{C/A})_\mathrm{Y} = 0$$

على المحور X :

$$\leftarrow \quad A_\mathrm{C}.\cos 45 = 0 + (A_\mathrm{C/A})_\mathrm{X}$$

بالتعويض:

$$(A_\mathrm{C/A})_\mathrm{X} = 2\sqrt{2} \quad \mathrm{m/sec^2}$$

وهي قيمة تسارع C حول A الكلية التي تنطبق على الضلع CD ، أي:

$$A_\mathrm{C/A} = (A_\mathrm{C/A})_\mathrm{X} = 2\sqrt{2} \quad \mathrm{m/sec^2}$$

كما يمكن أن نكتب هذا التسارع وفق الشكل التالي:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{C/A}} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}}_{\mathbf{C/A}} + \boldsymbol{A}^{t}_{\mathbf{C/A}}$$

بإسقاط العلاقة وفق الناظم ووفق المماس كما في (الشكل4-21b) نحصل على:

$$A_{\mathrm{C/A}}.\cos 45 = A^{n}_{\mathrm{C/A}} = r.w^2 \quad \Rightarrow \quad w = \left(\frac{A_{\mathrm{C/A}}.\cos 45}{r}\right)^{1/2} = 3.76\ \mathrm{rad/sec}$$

$$A_{\mathrm{C/A}}.\sin 45 = A^{t}_{\mathrm{C/A}} = r.e \quad \Rightarrow \quad e = \frac{A_{\mathrm{C/A}}.\sin 45}{r} = 14.1\ \mathrm{rad/sec^2}$$

حيث لدينا من الشكل:

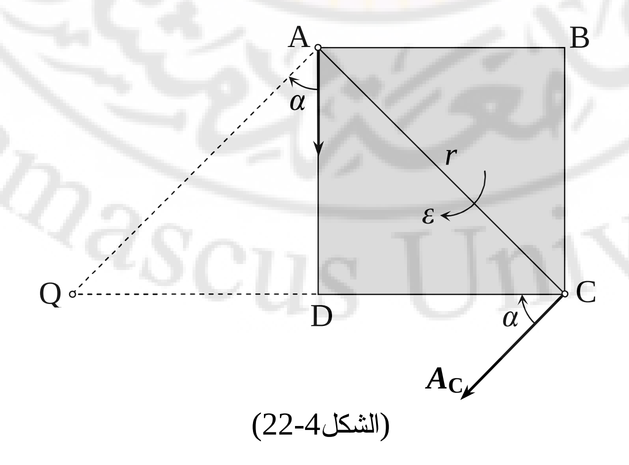
$$r = a/\cos 45 = 0.1\sqrt{2}\ \mathrm{m}$$

ويتعين اتجاهه من اتجاه دوران متجه التسارع المماسي النسبي $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{C/A}}$ حول القطب A ، وهو باتجاه حركة عقارب الساعة.

2. لتعيين المركز اللحظي للتسارع نحسب الزاوية:

$$a = \arctan\frac{|e|}{w^2} = \arctan 1 = 45^o$$

التي تمثل ميل تسارع نقطة من الصفيحة على المستقيم الواصل بين النقطة والمركز الآني للتسارع Q ، لذا نرسم مستقيماً من الطرف A يصنع مع التسارع $\boldsymbol{A}_{\mathbf{A}}$ زاوية α ، حيث ينطبق التسارع المذكور على المستقيم المنشأ باتجاه التسارع الزاوي، ويتقاطع مع المستقيم الآخر المنشأ بالطريقة نفسها من الطرف C ، في المركز اللحظي للتسارع المعدوم Q كما هو مبين في (الشكل4-22).



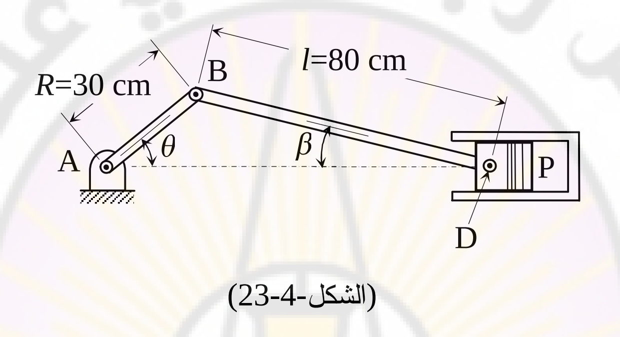
(الشكل4-22)

مسألة 4-4-4

في الآلة الترددية الموضحة بـــ (الشكل-4-23) يدور المرفق AB بعدد دورات ثابت في اتجاه حركة عقارب الساعة قدره ($n = 2000$ r.p.m).

أوجد مميزات حركة عناصر الآلة عند الوضع الموافق لزاوية المرفق وقدرها ($\theta = 40^o$).

الحل:



(الشكل-4-23)

- دراسة السرعات

المرفق AB

يدور المرفق AB حول المفصل الثابت A بسرعة زاوية قدرها:

$$w_{AB} = \frac{2p.n}{60} = \frac{2p(2000)}{60} = 209.44 \text{ rad/sec}$$

منه:

$$V_B = w_{AB}.R = 209 \times 30 = 6283.19 \text{ cm/sec}$$

ذراع توصيل الحركة BD

لدراسة حركة ذراع التوصيل BD الذي يتحرك حركة مستوية عامة، نحسب الزاوية β من تطبيق علاقة لامي على المثلث Δ ABD الموضح في (الشكل-4-23):

$$\frac{AB}{\sin b} = \frac{BD}{\sin q} \quad \Rightarrow \quad \frac{30}{\sin b} = \frac{80}{\sin 40} \quad \Rightarrow \quad b = 13.9^o$$

وبما أن حركة ذراع التوصيل BD هي حركة مستوية عامة وهي ممثلة بحركة انسحابية بدلالة القطب B وحركة دورانية حوله، تكون علاقة السرعة:

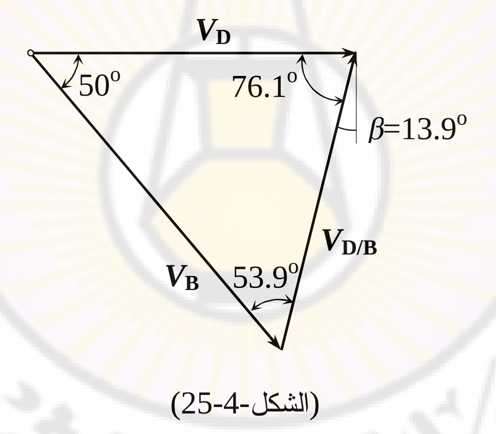
$$\boldsymbol{V_D} = \boldsymbol{V_B} + \boldsymbol{V_{D/B}}$$

حيث منحى السرعة V_D يجب أن يكون أفقياً، بينما سرعة الطرف B تساوي السرعة V_B بكونه نقطة من المرفق AB ، أما منحى السرعة النسبية $V_{D/B}$ فهو عمودي على ذراع التوصيل BD ، كما هو موضح في (الشكل-4-24).

Plane Motion = *Translation Motion* + *Rotation Motion*

(الشكل-4-24)

نرسم مثلث السرع الموضح في (الشكل-4-25) وفق علاقة السرعة.



(الشكل-4-25)

بتطبيق علاقة لامي على مثلث السرع:

$$\frac{V_D}{\sin 53.9} = \frac{V_{D/B}}{\sin 50} = \frac{V_B}{\sin 76.1}$$

ومنه:

$$V_{D/B} = \frac{\sin 50}{\sin 76.1} V_B = 4958.4 \text{ cm/sec} \angle 76.1^o$$

أيضاً:

$$V_D = \frac{\sin 53.9}{\sin 76.1} V_B = 5230 \text{ cm/sec} \rightarrow$$

ولحساب السرعة الزاوية لذراع التوصيل BD ، لدينا:

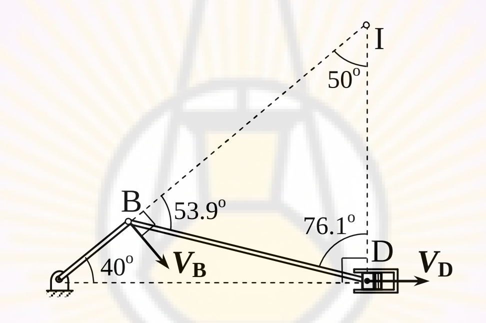
$$V_{D/B} = w_{DB} . l \qquad \Rightarrow \qquad w_{DB} = V_{D/B} / l = 61.99 \text{ rad/sec}$$

ونحصل على اتجاه ω_{DB} من اتجاه دوران المتجه $\boldsymbol{V_{D/B}}$ حول القطب B ، أي باتجاه دوران النقطة D حول B ، وهو باتجاه يعاكس حركة عقارب الساعة.

كما يمكن عَدُّ حركة ذراع التوصيل BD ممثلة بحركة دورانية آنية حول المركز اللحظي له I ، المبين في (الشكل-4-26) عند الوضع ($\theta = 40^o$)، ومنه علاقة السرعة:

$$\frac{V_B}{IB} = \frac{V_D}{ID} = w_{DB}$$

حيث منحى السرعة $\boldsymbol{V_D}$ يجب أن يكون أفقياً، بينما منحى سرعة الطرف B عمودي على ذراع المرفق AB ، كما هو موضح في (الشكل-4-26).



(الشكل-4-26)

وعليه يمكن تحديد موقع المركز اللحظي I ، باستخدام علاقة لامي في حساب الاطوال:

$$\frac{IB}{\sin 76.1} = \frac{ID}{\sin 53.9} = \frac{BD}{\sin 50}$$

منه:

$$IB = \frac{\sin 76.1}{\sin 50} l = 101.37 \text{ cm}$$

أيضاً:

$$ID = \frac{\sin 53.9}{\sin 50} l = 84.38 \text{ cm}$$

بالتعويض في علاقة السرعة نحصل على سرعة الطرف D :

$$V_D = \frac{ID}{IB} V_B = 5230 \text{ cm/sec}$$

والسرعة الزاوية لذراع التوصيل:

$$w_{DB} = \frac{\boldsymbol{V_B}}{IB} = 61.99 \text{ rad/sec}$$

نلاحظ تساوي السرع الخطية والزاوية بطريقتي الحساب، وخاصة السرعة الزاوية لدوران ذراع التوصيل BD حول القطب B أو حول المركز اللحظي له I .

المكبس P

إن سرعة المكبس P ذي الحركة الانسحابية تساوي سرعة نقطة منه D ، بالتالي:

$$V_P = V_D = 5230 \text{ cm/sec} \rightarrow$$

- دراسة التسارعات

المرفق AB

يدور المرفق AB حول المفصل الثابت A بسرعة زاوية ثابتة، منه يكون التسارع الزاوي للمرفق ($\varepsilon_{AB} = 0$) معدوماً، بالتالي يكون لتسارع الطرف B مركبة واحدة وهو التسارع المركزي أي الناظمي.

منه:

$$\boldsymbol{A_B} = \boldsymbol{A_B^n} + \boldsymbol{A_B^\tau} \quad , \quad A_B^t = e_{AB} . R = 0$$

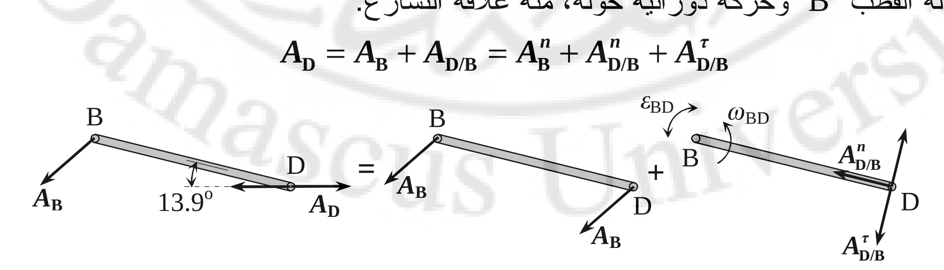
بالتالي:

$$\boldsymbol{A_B} = \boldsymbol{A_B^n} \quad \Rightarrow \quad A_B = A_B^n = w_{AB}^2 . R = 13159.47 \text{ m/sec}^2$$

ذراع التوصيل الحركة BD

يتحرك ذراع التوصيل BD حركة مستوية عامة وهي ممثلة بحركة انسحابية بدلالة القطب B وحركة دورانية حوله، منه علاقة التسارع:

$$\boldsymbol{A_D} = \boldsymbol{A_B} + \boldsymbol{A_{D/B}} = \boldsymbol{A_B^n} + \boldsymbol{A_{D/B}^n} + \boldsymbol{A_{D/B}^\tau}$$



Plane Motion = *Translation Motion* + *Rotation Motion*

(الشكل-4-27)

حيث المتجهات موضحة على (الشكل-4-27)، وهي:

$\boldsymbol{A}_{\mathbf{D}}$ يمثل تسارع الطرف D ، مجهول القيمة والاتجاه لكن منحاه أفقي.

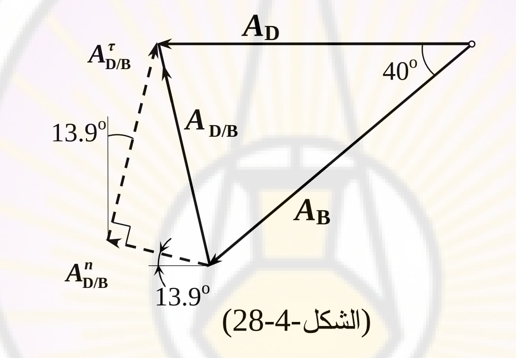
$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}}_{\mathbf{D/B}}$ يمثل التسارع الناظمي النسبي للطرف D بالنسبة للطرف B ، ويتجه من D إلى B ، وقيمته العددية:

$$A^{n}_{\mathrm{D/B}} = w^{2}_{\mathrm{BD}} .l = 3074.49 \ \mathrm{m/sec^2}$$

$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{D/B}}$ يمثل التسارع المماسي النسبي للطرف D بالنسبة B ، يفرض اتجاهه حيث يكون عمودياً على DB كما في الشكل، وقيمته العددية:

$$A^{t}_{\mathrm{D/B}} = e_{\mathrm{BD}} .l$$

نرسم مخطط التسارعات وفق علاقة التسارع كما هو مبين في (الشكل-4-28).



(الشكل-4-28)

بإسقاط علاقة التسارع على محورين متعامدين X و Y بالاستعانة بمضلع التسارعات نحصل على المعادلتين:

$$\leftarrow A_{\mathrm{D}} = A_{\mathrm{B}} .\cos 40 + A^{n}_{\mathrm{D/B}} .\cos 13.9 - A^{t}_{\mathrm{D/B}} .\cos 76.1$$

$$\downarrow \quad 0 = A_{\mathrm{B}} .\sin 40 - A^{n}_{\mathrm{D/B}} .\sin 13.9 - A^{t}_{\mathrm{D/B}} .\sin 76.1$$

بحل المعادلتين نحصل على:

$$A^{t}_{\mathrm{D/B}} = 7953 \ \mathrm{m/sec^2} \qquad , \qquad A_{\mathrm{D}} = 11154.6 \ \mathrm{m/sec^2} \rightarrow$$

نلاحظ أننا فرضنا اتجاه $\boldsymbol{A}_{\mathbf{D}}$ إلى اليسار، واتجاه $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{D/B}}$ على الأعلى، ونتج من الحل أن إشارة كل من A_{D} و $A^{\tau}_{\mathrm{D/B}}$ موجبتان، وهذا يعني أن الفرض صحيح.

ولحساب التسارع الزاوي لذراع التوصيل BD ، لدينا:

$$A^{t}_{\mathrm{D/B}} = e_{\mathrm{DB}} .l \qquad \Rightarrow \qquad e_{\mathrm{DB}} = A^{t}_{\mathrm{D/B}} / l = 9941.25 \ \mathrm{rad/sec^2}$$

ونحصل على اتجاه $\varepsilon_{\mathrm{DB}}$ من اتجاه دوران المتجه $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{D/B}}$ حول القطب B ، وهو باتجاه بعكس حركة عقارب الساعة.

المكبس P

إن تسارع المكبس P ذي الحركة الانسحابية يساوي تسارع نقطة منه D ، بالتالي:

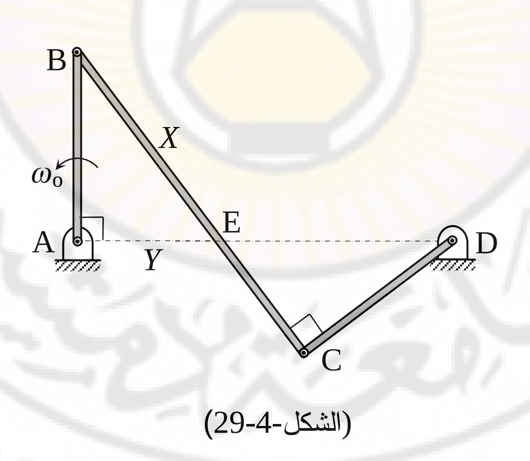
$$A_P = A_D = 11154.6 \text{ m/sec}^2 \rightarrow$$

مسألة -4-5

يدور المرفق AB بانتظام في التركيبة الآلية المبينة في (الشكل-4-29)، حول المفصل الثابت A بسرعة زاوية قدرها ($\omega_{AB} = 4$ rad/sec) باتجاه معاكس لحركة عقارب الساعة، ويتصل بواسطة المفصل المتحرك B بذراع توصيل الحركة BC ، لينقل الحركة إلى الوصلة CD عبر المفصل المتحرك C ، الذي يدور بدوره حول المفصل الثابت D . المطلوب دراسة حركة أجزاء التركيبة عند الوضع المبين في (الشكل-4-29).

علماً أن: AB = DC = 40 cm , AD = BC = 80 cm

الحل:



(الشكل-4-29)

- دراسة السرعة

المرفق AB

يتحرك المرفق AB حركة دورانية حول المفصل الثابت A بسرعة زاوية قدرها:

$$\omega_{AB} = 4 \text{ rad/sec}$$

منه:

$$V_B = w_{AB} . AB = 4 \times 40 = 160 \text{ cm/sec} \quad \leftarrow$$

ذراع التوصيل BC

لدراسة حركة ذراع التوصيل BC الذي يتحرك حركة مستوية عامة، نحسب الزوايا α و β من تشابه المثلثين ΔABE و ΔECD ، حيث:

$$BE = ED = X \quad , \quad EA = EC = Y$$

بجمع العلاقتين:

$$X + Y = AD = 80$$

ومن أحد المثلثين:

$$X^2 - Y^2 = AB^2 = 40^2$$

بحل المعادلتين نحصل على:

$$X = 50 \text{ cm} \quad , \quad Y = 30 \text{ cm}$$

نختار الطرف B قطباً أساسياً للحركة، فيكون:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{C}} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{B}} + \boldsymbol{V}_{\mathbf{C/B}}$$

حيث:

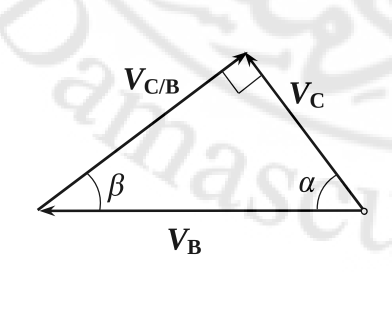
$\boldsymbol{V}_{\mathbf{C}}$ منحاه عمودي على الوصلة CD ، أي منطبق على ذراع التوصيل BC ، بالتالي فهو يميل على الأفق بزاوية α ، وقيمته العددية مجهولة.

$\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}}$ معلوم الاتجاه والقيمة العددية:

$$V_B = 160 \text{ cm/sec} \quad \leftarrow$$

$\boldsymbol{V}_{\mathbf{C/B}}$ منحاه عمودي على ذراع التوصيل BC ، ومنطبق على الوصلة CD ، بالتالي فهو يميل على الأفق بزاوية β ، وقيمته العددية مجهولة.

بالتالي يمكن رسم مثلث السرعة وفق علاقة السرعة والموضح في (الشكل-4-30a)، حيث يتحدد اتجاه كل من $\boldsymbol{V}_{\mathbf{C/B}}$ و $\boldsymbol{V}_{\mathbf{C}}$ ، ولا يوجد أكثر من مجهولين وهما $V_{C/B}$ و V_C.



A

B, V_B, ω1, β, X, ω0, A, α, E, D, Y, ω1, β, V_C, ω2, C, ω1, α, I

b

(الشكل-4-30)

وبتطبيق علاقة لامي لحساب أطوال أضلاع مثلث السرعة:

$$\frac{V_C}{\sin b} = \frac{V_B}{\sin 90} = \frac{V_{C/B}}{\sin a}$$

منه سرعة الطرف C :

$$V_C = \frac{\sin b}{\sin 90} V_B = \frac{Y}{X} V_B = \frac{3}{5} 160 = 96 \text{ cm/sec}$$

والسرعة النسبية له بالنسبة للطرف الثاني B :

$$V_{C/B} = \frac{\sin a}{\sin 90} V_B = \frac{AB}{X} V_B = \frac{4}{5} 160 = 128 \text{ cm/sec}$$

أما السرعة الزاوية لذراع التوصيل BC فتساوي:

$$w_{BC} = \frac{V_{C/B}}{BC} = 1.6 \text{ rad/sec}$$

ويتعين اتجاهها من اتجاه دوران متجه السرعة $\boldsymbol{V_{C/B}}$ حول القطب B ، أي دوران C حول B ، وهو باتجاه يعاكس حركة عقارب الساعة.

كما يمكن أن تكون حركة ذراع التوصيل BC ممثلة بحركة دورانية آنية حول المركز اللحظي له I ، المبين في (الشكل-4-30b) عند الوضع المطلوب، حيث منحى سرعة الطرف C يجب أن يكون عمودياً على الوصلة CD ، بينما منحى سرعة الطرف B عمودي على ذراع المرفق AB ، ومنه علاقة السرعة:

$$\frac{V_B}{IB} = \frac{V_C}{IC} = w_{CB}$$

لحساب الأطوال IC و IB لدينا:

$$IC = BC/\tan\alpha = 80(3/4) = 60 \text{ cm} \quad \text{و} \quad IB = \frac{BC}{\cos b} = \frac{80}{4/5} = 100 \text{ cm}$$

بالتعويض في علاقة السرعة نحصل على سرعة الطرف C :

$$V_C = \frac{IC}{IB} V_B = \frac{60}{100} 160 = 96 \text{ cm/sec}$$

السرعة الزاوية لذراع التوصيل:

$$w_{BC} = \frac{\boldsymbol{V}_B}{IB} = \frac{160}{100} = 1.6 \text{ rad/sec}$$

نلاحظ تساوي السرع الخطية والزاوية بطريقتي الحساب، وخاصة السرعة الزاوية لدوران ذراع التوصيل BC حول القطب B أو حول المركز اللحظي له I .

الوصلة CD

تتحرك الوصلة CD حركة دورانية حول المفصل الثابت D بسرعة زاوية قدرها:

$$w_{\mathrm{CD}} = \frac{V_{\mathrm{C}}}{\mathrm{DC}} = \frac{96}{40} = 2.4\ \mathrm{rad/sec}$$

ويتعين اتجاهها من اتجاه دوران متجه السرعة $\boldsymbol{V}_{\mathbf{C}}$ حول المفصل الثابت D ، أي دوران C حول D ، وهو باتجاه حركة عقارب الساعة.

- دراسة التسارع

المرفق AB

يدور المرفق AB حول المفصل الثابت A بسرعة زاوية ثابتة، منه يكون التسارع الزاوي للمرفق ($\varepsilon_{\mathrm{AB}} = 0$) معدوماً، بالتالي يكون لتسارع الطرف B مركبة واحدة وهو التسارع المركزي أي الناظمي، ويتجه نحو A ، وقيمته العددية كما يلي:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{B}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{\tau}} \qquad , \qquad A_{\mathrm{B}}^{t} = e_{\mathrm{AB}} \,.\, R = 0$$

بالتالي:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{B}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{n}} \qquad \Rightarrow \qquad A_{\mathrm{B}} = A_{\mathrm{B}}^{n} = w_{\mathrm{AB}}^{2} \,.\, AB = 16 \times 40 = 640\ \mathrm{cm/sec}^{2}$$

ذراع توصيل الحركة BC

يتحرك ذراع التوصيل BC حركة مستوية عامة وهي ممثلة بحركة انسحابية بدلالة القطب B وحركة دورانية حوله، نحسب قيمة تسارع المفصل C الذي يدرس بالنسبة لتسارع المفصل B والذي يساوي إلى:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{C}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{C/B}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{C/B}}^{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{C/B}}^{\boldsymbol{\tau}}$$

وبما أن حركة C حول D حركة دورانية فإن:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{C}}^{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{C}}^{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{C/B}}^{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{C/B}}^{\boldsymbol{\tau}}$$

حيث المتجهات موضحة في (الشكل-4-31)، كما يلي:

$\boldsymbol{A}_{\mathbf{C}}^{\boldsymbol{\tau}}$ يفرض اتجاهه، ومنحاه يقع على منحى BC ، وقيمته العددية مجهولة.

$\boldsymbol{A}_{\mathbf{C}}^{\boldsymbol{n}}$ يتجه من C إلى D ، وقيمته العددية:

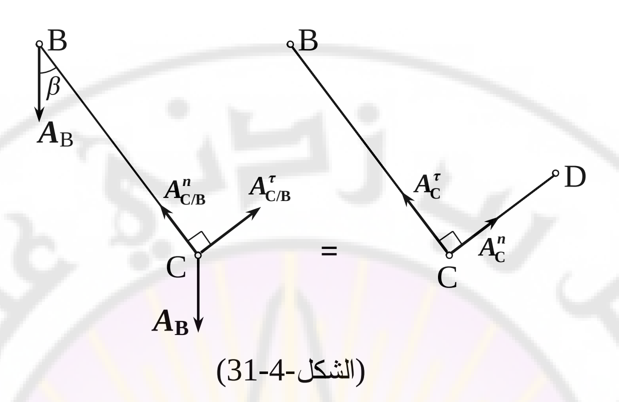
$$A_{\mathrm{C}}^{n} = w_{\mathrm{CD}}^{2} \,.\, \mathrm{DC} = 230.4\ \mathrm{cm/sec}^{2}$$

$\boldsymbol{A}_{\mathbf{B}}^{\boldsymbol{n}}$ معلوم القيمة والاتجاه والمنحى.

$\boldsymbol{A}_{\mathbf{C/B}}^{\boldsymbol{\tau}}$ يفرض اتجاهه، ومنحاه عمودي على BC ، وقيمته العددية مجهولة.

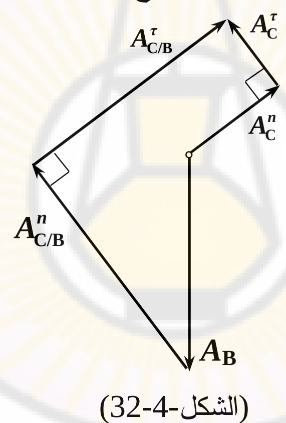
$\boldsymbol{A}^{n}_{\text{C/B}}$ يتجه من C إلى B ، وقيمته العددية:

$$A^{n}_{\text{C/B}} = w^{2}_{\text{BC}}.BC = 204.8\ \text{cm}/\text{sec}^{2}$$



(الشكل-4-31)

نرسم مخطط التسارع وفق علاقة التسارع كما هو مبين في (الشكل-4-32).



(الشكل-4-32)

بإسقاط طرفي علاقة التسارع على منحى الذراع BC ، وعلى المنحى العمودي عليه:

$$A^{t}_{\text{C}} = A^{n}_{\text{C/B}} - A_{\text{B}}.\cos b$$

$$A^{n}_{\text{C}} = A^{t}_{\text{C/B}} - A_{\text{B}}.\sin b$$

بحل المعادلتين نحصل على:

$$A^{t}_{\text{C/B}} = 614.4.15\ \text{cm}/\text{sec}^{2} \quad , \quad A^{t}_{\text{C}} = -307.2\ \text{cm}/\text{sec}^{2}$$

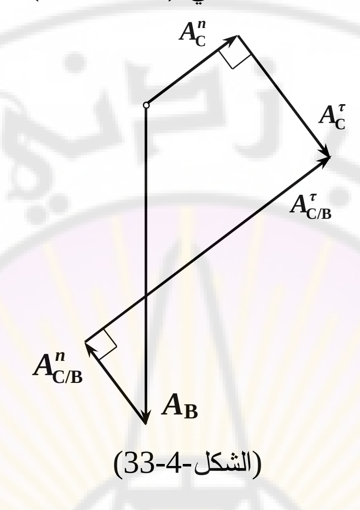
الإشارة السالبة تدل على أن الاتجاه الصحيح لـــ $\boldsymbol{A}^{\tau}_{\text{C}}$ معاكس للاتجاه المفروض.

ومنه يمكن حساب التسارع الزاوي لذراع التوصيل BC :

$$A^{t}_{\text{C/B}} = \text{CB}.e_{\text{CB}} \quad \Rightarrow \quad e_{\text{CB}} = \frac{A^{t}_{\text{C/B}}}{\text{CB}} = \frac{614.15}{80} = 7.68\ \text{rad}/\text{sec}^{2}$$

ويتعين اتجاهه من اتجاه دوران متجه التسارع المماسي النسبي المفروض $A^{\tau}_{C/B}$ حول B ، وهو باتجاه عكس حركة عقارب الساعة.

بالتالي يصبح مخطط التسارع كما هو مبين في (الشكل-4-33).



(الشكل-4-33)

الوصلة CD

تتحرك الوصلة CD حركة دورانية حول المفصل الثابت D بتسارع زاوي قدره:

$$A^t_C = CD.e_{CD} \quad \Rightarrow \quad e_{CD} = \frac{A^t_C}{CD} = \frac{307.2}{40} = 7.68\,\text{rad/sec}^2$$

ويتعين اتجاهه من اتجاه دوران متجه التسارع المماسي A^τ_C حول المفصل الثابت D ، وهو باتجاه عكس حركة عقارب الساعة.

بالتالي عدد هذا الوضع تكون:

حركة المرفق AB حركة منتظمة لأن:

$$w_{AB} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad e_{AB} = 0$$

وحركة ذراع التوصيل BC حركة متسارعة لأن:

$$w_{BC}.e_{BC} > 0$$

وحركة الوصلة CD حركة متباطئة لأن:

$$w_{CD}.e_{CD} < 0$$

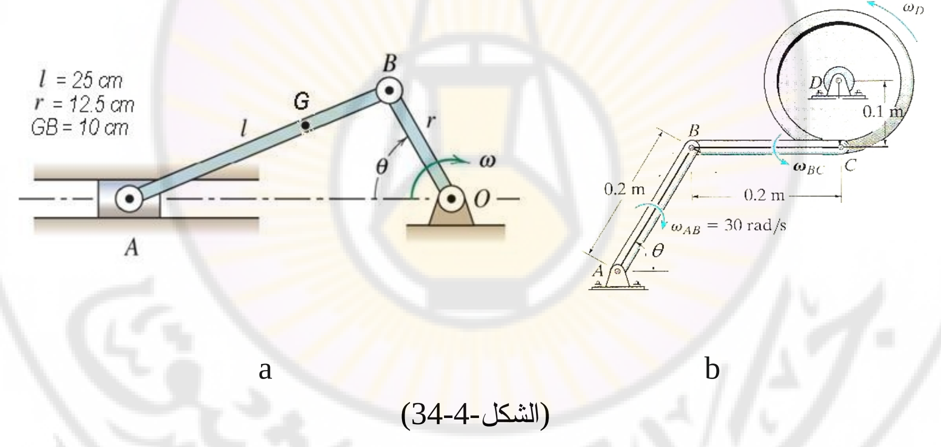
PROBLEMS مسائل غير محلولة

مسألة - 1

يدور عمود المرفق OB باتجاه دوران عقارب الساعة بمقدار 1500 r.p.m كما هو موضح في (الشكل-4-34a). فإذا كان طول عمود المرفق ($r = 12.5$ cm)، وطول ذراع التوصيل ($l = 25$ cm)، وكان البعد (GB = 10 cm)، المطلوب في اللحظة التي تكون فيها ($\theta = 60°$)، حساب ما يلي:

1. سرعة المكبس A .
2. السرعة الزاوية لذراع التوصيل AB .
3. سرعة النقطة G الواقعة على ذراع التوصيل.

الجواب: $V_A = 20.2$ m/sec , $\omega_{AB} = 29.5$ rad/sec , $V_G = 19.24$ m/s



a b

(الشكل-4-34)

مسألة - 2

يدور الذراع AB الموضح في(الشكل-4-34b) باتجاه دوران عقارب الساعة، وبسرعة زاوية مقدارها ($\omega_{AB} = 30$ rad/sec)، فإذا كان نصف قطر القرص D يساوي ($r = 0.1$ m)، وأن (AB = BC = 0.2 m)، المطلوب عندما تكون ($\theta = 60°$) حساب ما يلي:

1. سرعة النقطة B ، وسرعة النقطة C.
2. السرعة الزاوية للذراع BC ، والسرعة الزاوية للقرص D .

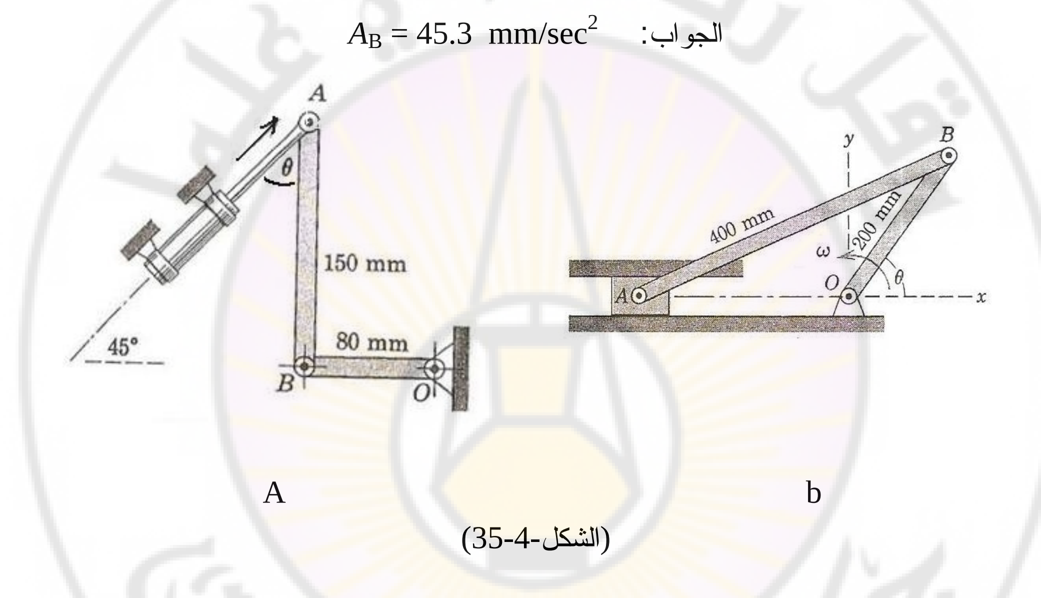
الجواب: $V_B = 6$ m/sec , $V_C = 5.2$ m/s →

$\omega_{BC} = 2$ rad/sec ↶ , $\omega_D = 52$ rad/sec ↶

مسألة - 3

يتحرك ذراع مكبس الأسطوانة الهيدروليكية حركة انسحابية بسرعة ثابتة مقدارها ($V_A = 80 \ \text{mm/sec}$)، في الاتجاه الموضح على (الشكل-4-35a)، وذلك في اللحظة التي تكون فيها ($\theta = 45°$)، ويكون الذراع OB في وضع أفقي. المطلوب حساب تسارع النقطة B .

الجواب: $A_B = 45.3 \ \text{mm/sec}^2$



A b

(الشكل-4-35)

مسألة - 4

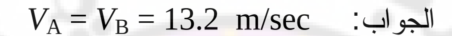
يدور عمود المرفق OB في التركيبة الآلية المبينة، بسرعة زاوية منتظمة مقدارها ($\omega = 4 \ \text{rad/sec}$) في الاتجاه الموضح في (الشكل-4-35b)، فإذا كان طول عمود المرفق ($r = 200 \ \text{mm}$)، وطول ذراع توصيل الحركة ($l = 400 \ \text{mm}$)، المطلوب في اللحظة التي تكون فيها ($\theta = 60°$)، حساب ما يلي:

1. سرعة المكبس A .
2. تسارع المكبس A .

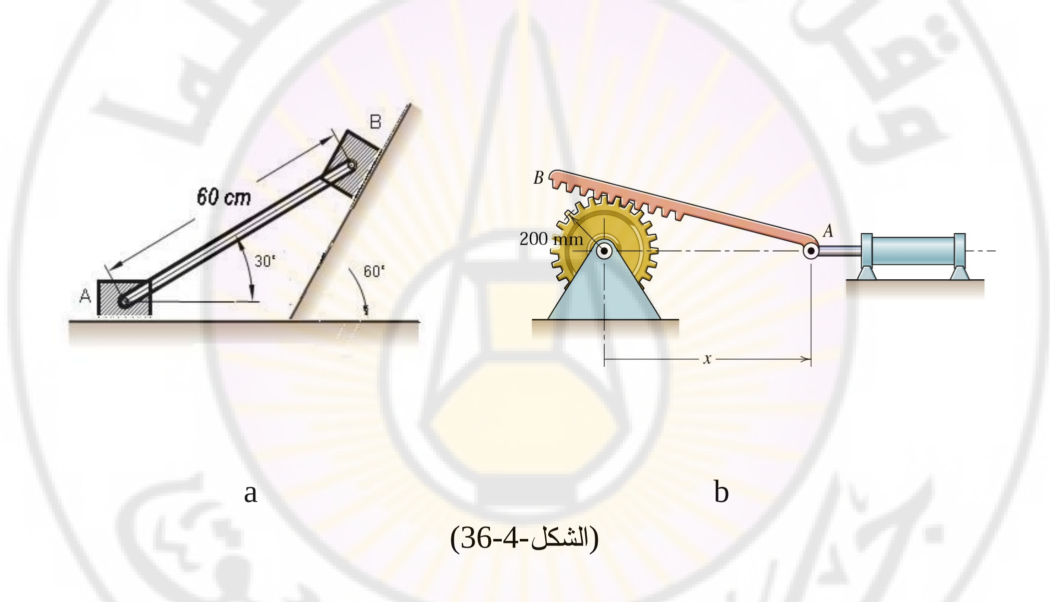
الجواب: $V_A = 49.8 \ \text{cm/sec} \ , \ A_A = 241 \ \text{cm/sec}^2$

مسألة - 5

للوضع المبين في (الشكل-4-36a)، كانت السرعة الزاوية للذراع الواصلة بين الجسمين A و B تساوي ($\omega = 22$ rad/sec)، في اتجاه معاكس لدوران عقارب الساعة، فإذا كان طول الذراع يساوي 60 cm ، المطلوب حساب سرعة كل من الجسمين A و B في الوضع المبين باستخدام مفهوم المركز اللحظي للدوران في الحركة المستوية العامة.



الجواب: $V_A = V_B = 13.2$ m/sec



(الشكل-4-36)

مسألة - 6

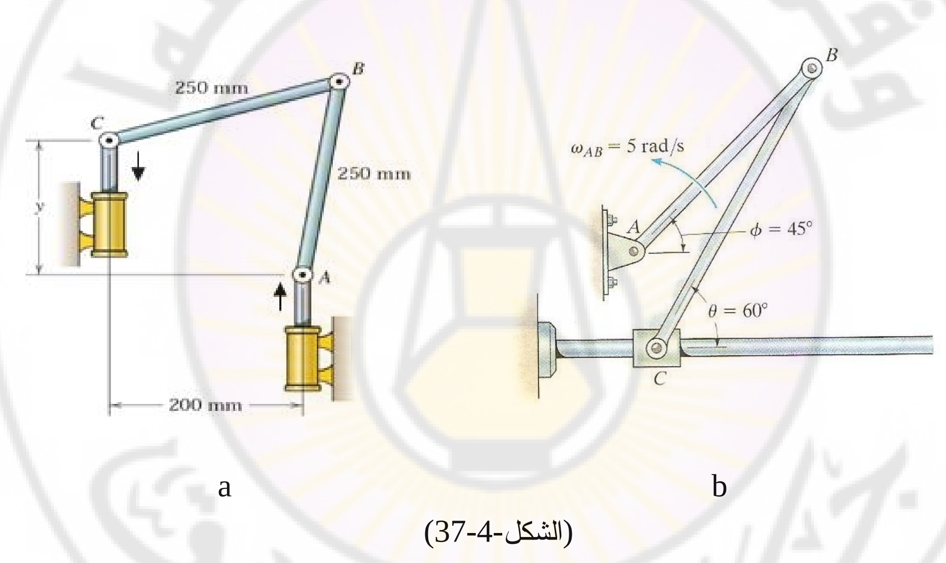
إذا كانت سرعة قضيب التحكم الأفقي الموضح في (الشكل-4-36b)، تساوي ($V_A = 0.3$ m/sec)، المطلوب عندما تكون ($x = 800$ mm)، حساب السرعة الزاوية للمسنن الدائري ω_O ، والسرعة الزاوية ω_{AB} للقضيب المسنن AB.

الجواب: $\omega_O = 1.45$ rad/sec ↷ , $\omega_{AB} = 0.097$ rad/sec ↶

مسألة - 7

في التركيبة الموضحة في (الشكل-4-37a)، يتحرك ذراع الأسطوانة الهيدروليكية اليمنى رأسياً نحو الأعلى بسرعة قدرها ($V_A = 3$ m/sec)، ويتحرك ذراع الأسطوانة الهيدروليكية اليسارية نحو الأسفل بسرعة قدرها ($V_C = 2$ m/sec). المطلوب في اللحظة التي تكون فيها ($y = 150$ mm)، حساب سرعة النقطة B .

الجواب: $V_B = 3.97$ m/sec



(الشكل-4-37)

مسألة - 8

في التركيبة الآلية الموضحة في (الشكل-4-37b)، يدور الذراع AB بعكس دوران عقارب الساعة، بسرعة زاوية قدرها ($\omega = 5$ rad/sec)، فإذا كان طول الوصلة (AB = 60 cm)، وطول الوصلة (BC = 80 cm)، المطلوب في اللحظة التي تكون فيها ($\Phi = 45°$, $\theta = 60°$)، حساب ما يلي:

1. سرعة الحلقة المنزلقة C .
2. السرعة الزاوية للوصلة BC .

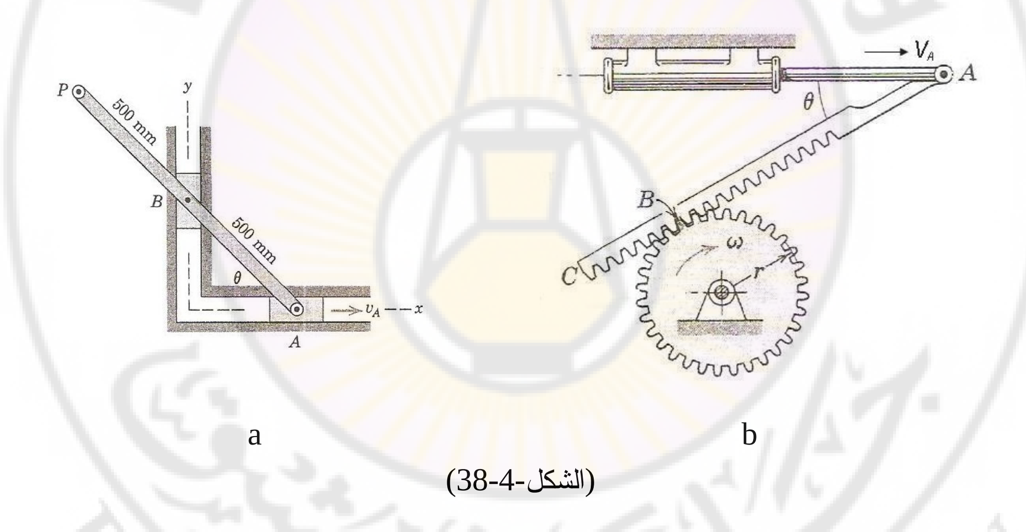
الجواب: $\omega_{BC} = 5.3$ rad/sec , $V_C = 1.55$ m/sec

مسألة - 9

يتم التحكم في حركة قضيب الموضح في (الشكل-4-38a)، بواسطة مساري الجسمين المنزلقين A و B ، فإذا كانت السرعة الزاوية للقضيب هي ($\omega = 2$ rad/sec) بعكس دوران عقارب الساعة عندما يمر من الوضع الموافق للزاوية ($\theta = 45°$)، المطلوب عند هذا الوضع حساب ما يلي:

1. سرعة الجسم A .
2. سرعة الطرف P .

الجواب: $V_A = 0.707$ m/sec , $V_P = 1.581$ m/sec



(الشكل-4-38)

مسألة - 10

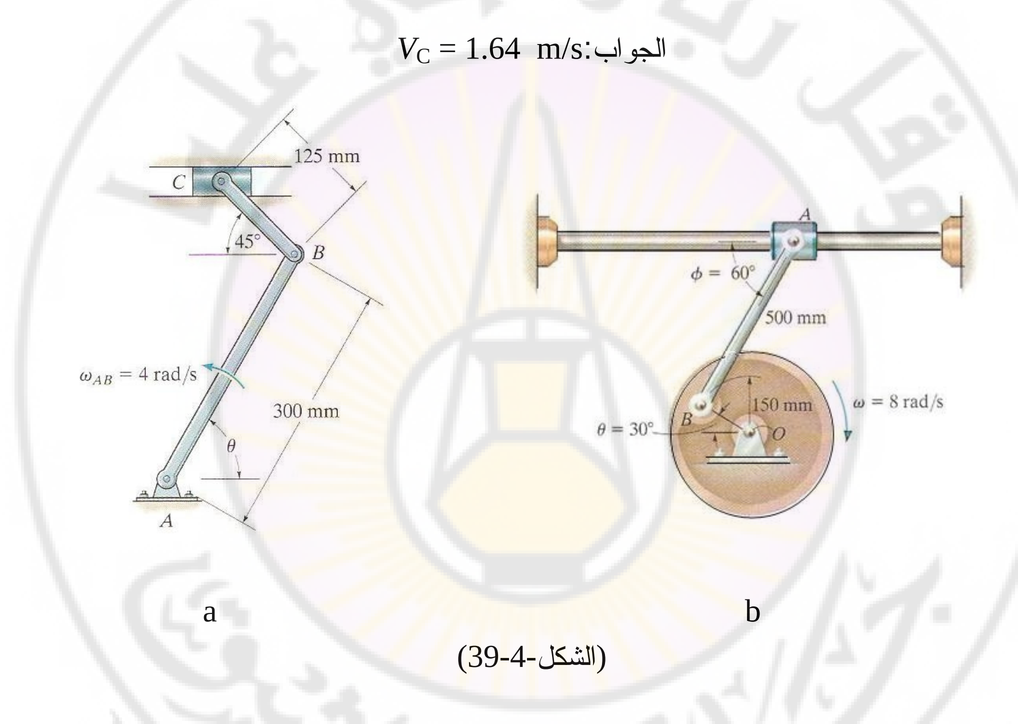
في التركيبة الآلية الموضحة في (الشكل-4-38b)، يتحرك زند الاسطوانة الهيدروليكية إلى اليمين بسرعة ثابتة مقدارها ($V_A = 0.5$ m/sec)، فإذا كان نصف قطر المسنن الدائري ($r = 15$ cm)، المطلوب عندما ($\theta = 45°$) حساب السرعة الزاوية ω للمسنن الدائري.

الجواب: $\omega = 2.36$ rad/sec

مسألة - 11

في التركيبة الآلية الموضحة في (الشكل-4-39a)، تدور الوصلة AB بسرعة زاوية مقدارها 4 rad/sec بعكس دوران عقارب الساعة، المطلوب في اللحظة التي تكون فيها ($\theta = 60°$)، حساب سرعة المنزلقة C (*Slider*) . مع العلم أن الأبعاد مبينة على الشكل.

الجواب: $V_C = 1.64$ m/s



(الشكل-4-39)

مسألة - 12

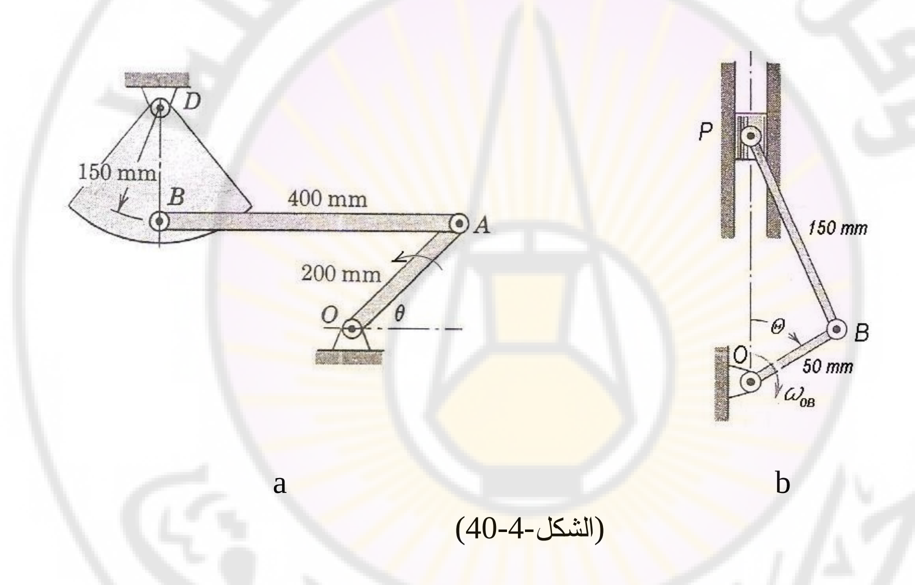
يدور القرص الموضح في (الشكل-4-39b) مع عقارب الساعة بسرعة زاوية مقدارها 8 rad/sec ، مما يؤدي إلى تحريك الوصلة AB والمنزلقة A المثبتة في نهايته العلوية. المطلوب عندما تكون الزاوية ($\theta = 30°$) والزاوية ($\Phi = 60°$)، حساب سرعة المنزلقة A .

الجواب: $V_A = 2.4$ m/sec

مسألة - 13

في التركيبة الآلية الموضحة في (الشكل-4-40a)، يدور المرفق OA بسرعة زاوية تساوي 4 rad/s بعكس دوران عقارب الساعة خلال مدة من حركته. المطلوب عندما ($\theta = 45°$) حيث في هذه اللحظة يكون AB أفقيا و BD رأسياً، حساب السرعة الزاوية لكل من الوصلة AB ، والقطاع BD .

الجواب: $\omega_{BD} = 3.77$ rad/sec - CW و $\omega_{AB} = 1.414$ rad/sec - CCW



a b

(الشكل-4-40)

مسألة - 14

يدور عمود المرفق OB حول المفصل O دوراناً منتظماً باتجاه دوران عقارب الساعة بمقدار ($n = 900$ rev/min)، كما هو موضح في (الشكل-4-40b). المطلوب حساب تسارع المكبس P في الحالتين التاليتين:

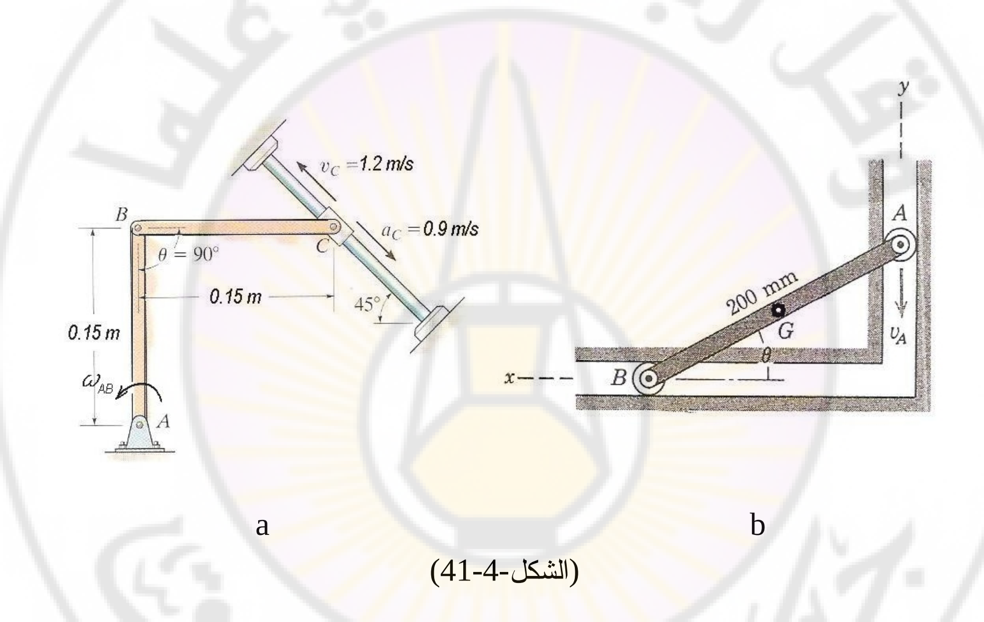
a. عندما تكون ($\theta = 60°$).
b. عندما تكون ($\theta = 120°$).

الجواب: (b) $A_P = 296$ m/sec^2 - up و (a) $A_P = 148.3$ m/sec^2 - down

مسألة - 15

بفرض أن سرعة الحلقة المنزلقة C تساوي 1.2 m/sec ، وتسارعها يساوي $0.9 \ m/s^2$ طبقاً للاتجاهات الموضحة على (الشكل-4-41a)، المطلوب في اللحظة التي توافق ($\theta = 90°$)، حساب السرعة الزاوية ω_{AB} والتسارع الزاوي ε_{AB} للوصلة AB .

الجواب: $\omega_{AB} = 5.67 \ rad/sec \quad , \quad \varepsilon_{AB} = 36.3 \ rad/sec^2$



a b

(الشكل-4-41)

مسألة - 16

إذا كانت سرعة النهاية A ثابتة وتساوي 2 m/sec باتجاه الأسفل كما هو مبين في(الشكل-4-41b). المطلوب عندما تكون الزاوية ($\theta = 30°$)، حساب سرعة النقطة G منتصف الوصلة AB وتسارعها.

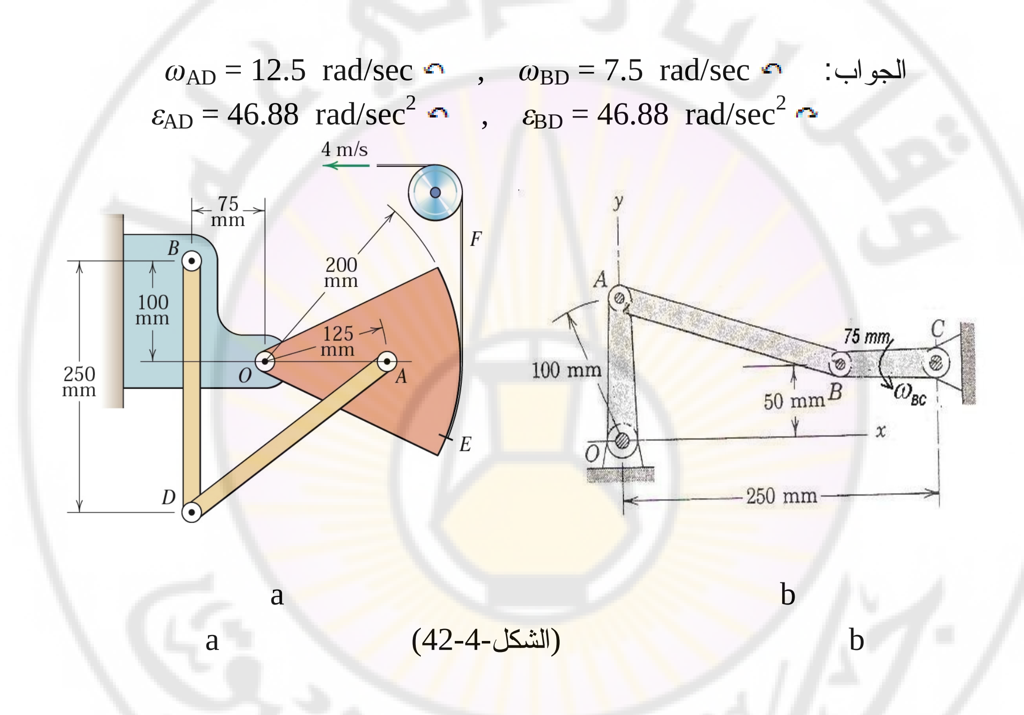
الجواب: $V_G = 1.155 \ m/sec \quad , \quad A_G = 15.4 \ m/sec^2$

مسألة - 17

في الآلية الموضحة في (الشكل-4-42a)، يتحرك الحزام المثبت في النقطة E الواقعة على محيط قطاع دائري (*Sector*)، بسرعة منتظمة نحو اليسار مقدارها 4 m/sec . المطلوب في اللحظة التي يكون فيها الذراع BD متعامداً مع الخط OA ، حساب السرعة الزاوية و التسارع الزاوي لكل من الذراعين AD و BD .

الجواب: $\omega_{BD} = 7.5\ \text{rad/sec}$ ↶ , $\omega_{AD} = 12.5\ \text{rad/sec}$ ↶

$\varepsilon_{BD} = 46.88\ \text{rad/sec}^2$ ↷ , $\varepsilon_{AD} = 46.88\ \text{rad/sec}^2$ ↶



a (الشكل-4-42) b

مسألة - 18

في الآلية الموضحة في (الشكل-4-42b)، يدور عمود المرفق BC حول المفصل C خلال قوس صغير بعكس دوران عقارب الساعة، وبسرعة زاوية ثابتة مقدارها ($\omega_{BC} = 2\ \text{rad/sec}$)، حيث يجعل العمود OA يدور حول المفصل O . المطلوب للوضع المبين حيث BC أفقي و OA رأسي، حساب السرعة الزاوية والتسارع الزاوي لكل من العمودين OA و AB .

الجواب: $\omega_{AB} = 0.86\ \text{rad/sec}$ ↷ , $\omega_{OA} = 0.43\ \text{rad/sec}$ ↷

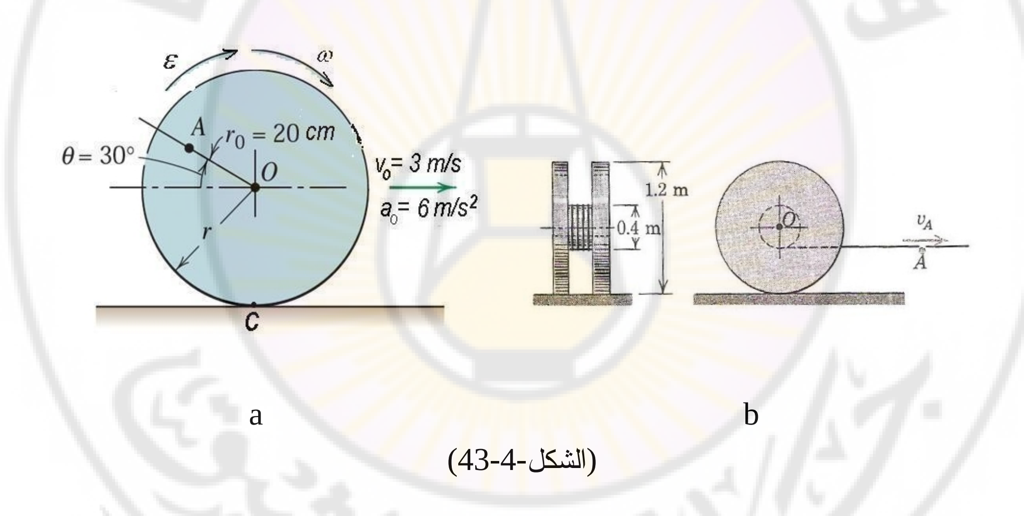
$\varepsilon_{AB} = 0.105\ \text{rad/sec}^2$ ↷ , $\varepsilon_{OA} = 4.34\ \text{rad/sec}^2$ ↷

مسألة - 19

تتدحرج عجلة نصف قطرها ($r = 300$ mm) إلى اليمين دون انزلاق، حيث كانت سرعة مركزها O تساوي إلى ($V_O = 3$ m/sec)، وتسارعه يساوي ($A_O = 6$ m/sec^2)، وكلاهما إلى اليمين في اللحظة المعنية كما هو مبين في (الشكل-4-43a). المطلوب في هذه اللحظة حساب ما يلي:

1. سرعة النقطة A وتسارعها.
2. تسارع نقطة التماس C .

الجواب: $V_A = 4.36$ m/sec , $A_A = 26.15$ m/sec^2 , $A_C = 30$ m/sec^2



a b

(الشكل-4-43)

مسألة - 20

تتدحرج بكرة هاتف دون انزلاق على سطح أفقي كما هو مبين في (الشكل-4-43b)، فإذا كانت سرعة النقطة A الواقعة على الكبل تساوي ($V_A = 0.8$ m/sec)، وتتجه إلى اليمين. المطلوب حساب سرعة مركز البكرة O ، والسرعة الزاوية لها.

الجواب: $V_O = 1.2$ m/sec , $\omega = 2$ rad/sec ↷

مسألة - 21

تتدحرج عجلة نصف قطرها 30 cm دون انزلاق نحو اليمين كما هو مبين في (الشكل-4-44a)، فإذا تحرك مركز عجلة السيارة بسرعة ثابتة مقدارها 15 m/sec .

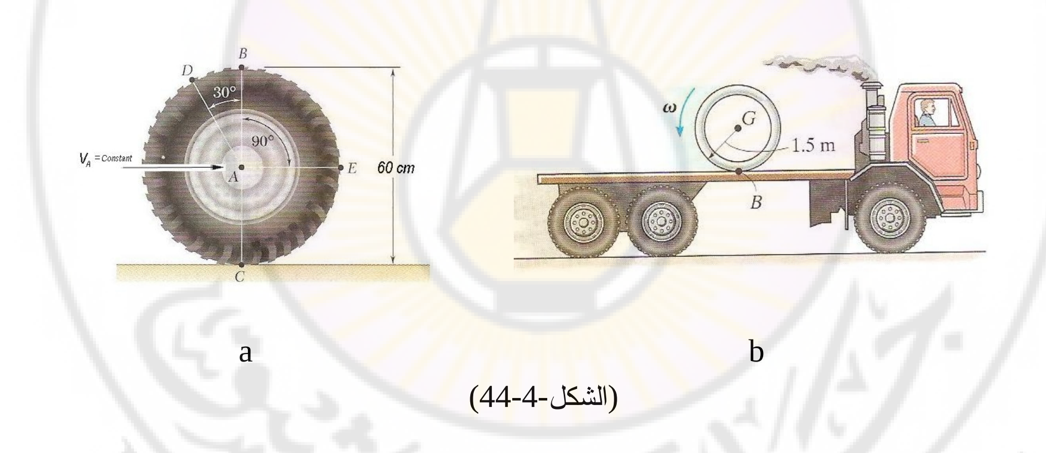
المطلوب:

1. تحديد المركز اللحظي ذا السرعة المعدومة للعجلة، ثم أوجد سرع النقاط B,C,D,E.
2. إيجاد التسارع الخطي لكل من النقاط B , C , D .

الجواب:

$V_B = 30$ m/sec , $V_C = 0$, $V_D = 29$ m/sec , $V_E = 1.2$ m/sec

$A_B = 750$ m/sec^2 - down , $A_C = 750$ m/sec^2 - up , $a_D = 750$ m/sec^2



a b

(الشكل-4-44)

مسألة - 22

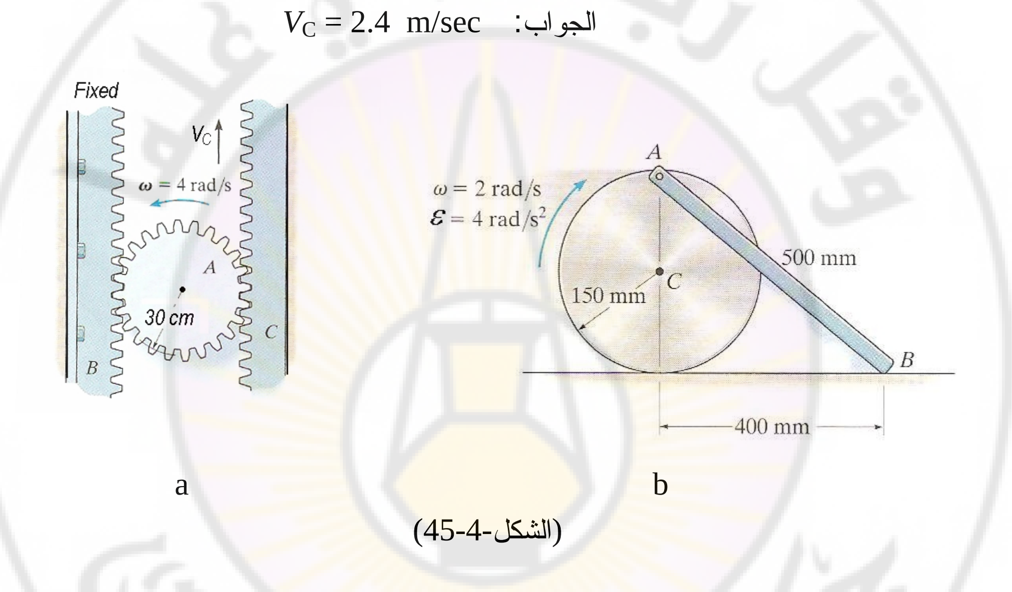
يوضح (الشكل-4-44b) شاحنة تحمل أسطوانة نصف قطرها 1.5 m ، في اللحظة المبينة تتحرك الشاحنة نحو اليمين بسرعة 3 m/sec ، بينما تتدحرج الأسطوانة دون انزلاق بعكس دوران عقارب الساعة، بسرعة زاوية تساوي 8 rad/sec ، المطلوب تحديد المركز اللحظي للأسطوانة، ومن ثم حساب سرعة مركزها G .

الجواب: $V_G = 9$ m/sec

مسألة - 23

في التركيبة الآلية الموضحة في (الشكل-4-45a)، يتدحرج مسنن دائري A نصف قطره 30 cm ، على المسنن المستقيم الساكن B بسرعة زاوية مقدارها ($\omega = 4$ rad/sec) بعكس دوران عقارب الساعة. المطلوب تحديد المركز اللحظي ذي السرعة الصفرية للمسنن الدائري، ومن ثم حساب سرعة المسنن المستقيم C .

الجواب: $V_C = 2.4$ m/sec



(الشكل-4-45)

مسألة - 24

يتدحرج قرص نصف قطره 150 mm دون انزلاق وبسرعة زاوية مقدارها ($\omega = 2$ rad/sec)، وبتسارع زاوي مقداره ($\varepsilon = 4$ rad/sec^2) وفق الاتجاه المبين في (الشكل-4-45b). بفرض أن النقطة A تقع على محيط القرص، المطلوب للوضع الموضح حساب ما يلي:

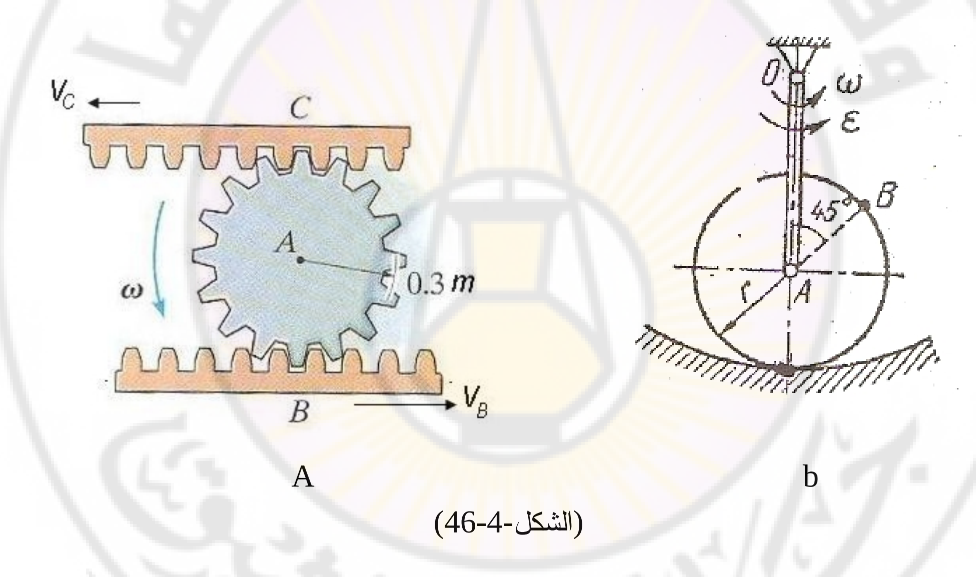
1. تسارع النقطة A .
2. تسارع النقطة B .
3. التسارع الزاوي للذراع AB .

الجواب: $A_A = 1.34$ m/sec^2 , $A_B = 1.65$ m/sec^2 , $\varepsilon_{AB} = 1.5$ rad/sec^2

مسألة - 25

يتدحرج المسنن الدائري دون انزلاق على الجريدتين المسننتين (*Gear Racks*) اللتين تتحركان بصورة متوازية وباتجاهين متعاكسين كما هو مبين في (الشكل-4-46a)، فإذا كانت سرعة B نحو اليمين وتساوي 8 m/s ، بينما سرعة C نحو اليسار وتساوي 4 m/s ، المطلوب تحديد المركز اللحظي ذي السرعة الصفرية للقرص، ومن ثم حساب السرعة الزاوية للمسنن الدائري ω وسرعة المركز A .

الجواب: $\omega = 20$ rad/sec , $V_A = 2$ m/sec



A b

(الشكل-4-46)

مسألة - 26

يوضح (الشكل-4-46b) مجموعة، تتضمن عجلة مركزها A ، وذراع توصيل OA ، بفرض أن العجلة تتدحرج دون انزلاق على أرض منحنية، بفعل حركة الذراع الذي يتأرجح في اللحظة المبينة بسرعة زاوية مقدارها ($\omega = 3$ rad/sec)، وبتسارع زاوي مقداره ($\varepsilon = 2$ rad/sec^2) وفق الاتجاه المبين في الشكل، فإذا كان (OA = 30 cm) و ($r = 15$ cm)، المطلوب إيجاد سرعة كل من النقطتين A , B وتسارعهما.

الجواب: $V_A = 0.9$ m/sec , $A_A = 2.77$ m/sec^2

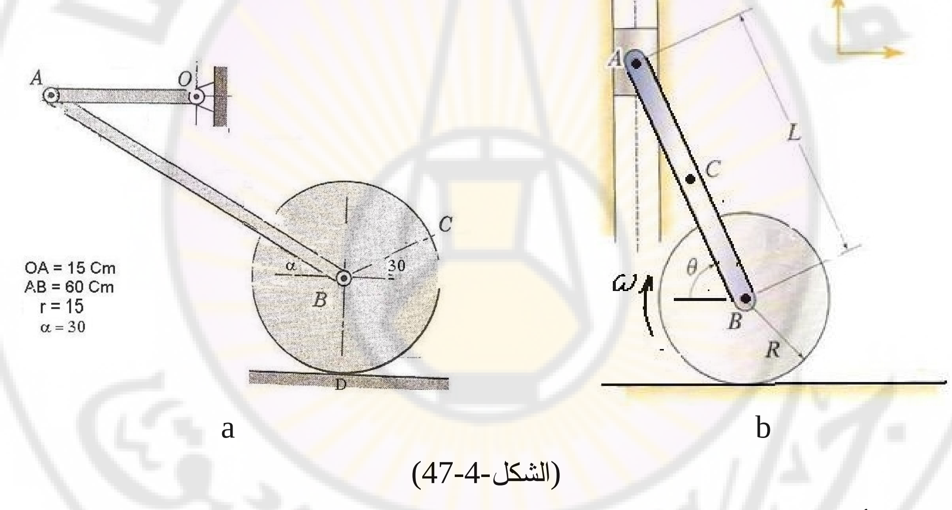
$V_B = 1.67$ m/sec , $A_B = 3.2$ m/sec^2

مسألة - 27

لدينا التركيبة الآلية الموضحة في (الشكل-4-47a)، والمؤلفة من المرفق OA وذراع توصيل الحركة AB ، والقرص الذي يتدحرج دون انزلاق على أرض أفقية، فإذا كان المرفق في اللحظة المبينة، يدور بسرعة زاوية ثابتة مقدارها ($\omega = 2$ rad/sec) بعكس دوران عقارب الساعة. المطلوب حساب ما يلي:

1. سرعة كل من النقاط A , B , C .
2. تسارع كل من النقاط A , B , C .

الجواب: $V_C = 29.4$ cm/sec , $V_A = 30$ cm/sec , $V_B = 17.3$ cm/sec
$A_C = 57$ cm/sec^2 , $A_A = 60$ cm/sec^2 , $A_B = 37$ cm/sec^2



a b

(الشكل-4-47)

مسألة - 28

تتضمن التركيبة الآلية الموضحة في (الشكل-4-47b)، عجلة مركزها B ، وذراع توصيل حركة AB ، ومنزلقة A تتحرك داخل دليل شاقولي، بفرض أن العجلة تتدحرج دون انزلاق بسرعة زاوية مقدارها ($\omega_1 = 2$ rad/sec)، وبتسارع زاوي مقداره ($\varepsilon_1 = 5$ rad/sec^2) وفق الاتجاه المبين في الشكل، فإذا كان (AC = BC) ($R = 20$ cm) (L = 60 cm)، المطلوب عندما ($\theta = 60°$) حساب ما يلي:

1. سرعة كل من النقاط A , B , C .
2. تسارع كل من النقاط A , B , C .

الجواب: $V_C = 23.01$ cm/sec , $V_A = 23.1$ cm/sec , $V_B = 40$ cm/sec
$A_C = 71$ cm/sec^2 , $A_A = 60$ cm/sec^2 , $A_B = 99$ cm/sec^2

الفصل الخامس

الحركة الدورانية للجسم الصلب حول نقطة ثابتة منه

Rotational Motion of a Rigid Body about a Fixed Point

الحالة العامة لحركة الجسم الصلب الحر

Independent Rigid Body Motion

1- تعريف الحركة

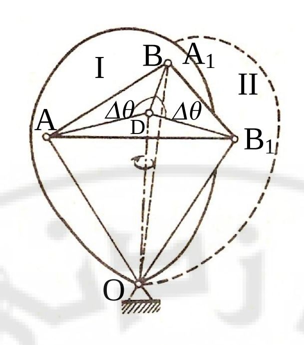
تحصل هذه الحركة للجسم الصلب عندما تبقى إحدى نقاطه O ثابتة طوال مدة حركته، ويتحرك مثل هذه الحركة لعبة الأطفال المسماة بالبلبل أو المغزل الدوار التي تكون نقطة ارتكازها على المستوي هي النقطة الثابتة، وكذلك الأجسام الصلبة المتحركة والمتمفصلة بواسطة مسند أو مفصل كروي، ففي هذه الحركة تتحرك جميع جسيمات الجسم المادية على سطوح كرات صغيرة أنصاف أقطارها تساوي بعد تلك الجسيمات عن النقطة الثابتة، من هنا يمكن تسمية حركة الجسم الصلب حول نقطة ثابتة منه بالحركة الكروية (*Spherical Motion*).

2- التمثيل الهندسي للحركة

إن حركة الجسم الصلب المعينة يمكن أن تكون دوراناً حول محور آني للدوران يمر من النقطة الثابتة، ولقد أوجد العالم أويلر هذه الحركة وأثبت أن كل انتقال لجسم صلب ذي نقطة واحدة ثابتة من وضعية ما إلى وضعية أخرى، يمكن أن يتم بدوران الجسم بزاوية ما حول محور آني للدوران مار من هذه النقطة الثابتة، وهذا ما يعرف بنظرية أويلر (*Euler Theorem*). نسبة لعالم الرياضيات والميكانيك السويسري الشهير ليونارد أويلر(*Leonard Euler*) (1707-1783).

يمكن تمثيل الحركة كما هو مبين في (الشكل-5-1)، حيث يتحدد موضع الجسم ذي النقطة الثابتة O بمعرفة وضعية نقطتين ما منه مثل A و B غير واقعيتن على استقامة واحدة مع النقطة O .

نفرض أن الجسم يأخذ في الفراغ الوضع I في اللحظة t_1 ، وينتقل إلى الوضع II المبين في الشكل بالخط المنقط في اللحظة t_2 ، ولتكن النقطة الاختيارية A ، ونعد النقطة الثانية B هي إحدى نقاط الجسم التي تأخذ في اللحظة t_1 ذلك الوضع في الفراغ الذي تنتقل إليه النقطة A عند اللحظة t_2 .



(الشكل-5-1)

وبعد انتقال الجسم إلى الوضع II تأخذ النقطة A الوضع A_1 في الفراغ، الذي كانت تحتله النقطة B من قبل، أما النقطة B فتنتقل إلى موضع جديد إلى B_1 ، ولإثبات نظرية أويلر نمرر مستوياً يمر بالنقاط A , A_1 , B_1 ، ونسقط من النقطة الثابتة O عموداً OD على هذا المستوي، ومن خاصية الأبعاد النسبية لنقاط الجسم الصلب التي تبقى ثابتة خلال الحركة لدينا:

$$OB = OB_1 \qquad , \qquad OA_1 = OB \qquad , \qquad OA = OA_1$$

ومنه:

$$OA = OA_1 = OB_1$$

وأيضا لدينا:

$$AA_1 = A_1B_1$$

ومنه تتساوى المثلثات:

$$\Delta OAA_1 = \Delta OA_1B_1$$

من جهة أخرى لدينا:

$$AD = A_1D = B_1D$$

التي تعد كمساقط للمستقيمات المتساوية OA, OA_1, OB_1 المائلة بزوايا متساوية على مستوٍ واحد، بالتالي تتساوى المثلثات:

$$\Delta\, ADA_1 = \Delta\, A_1DB_1$$

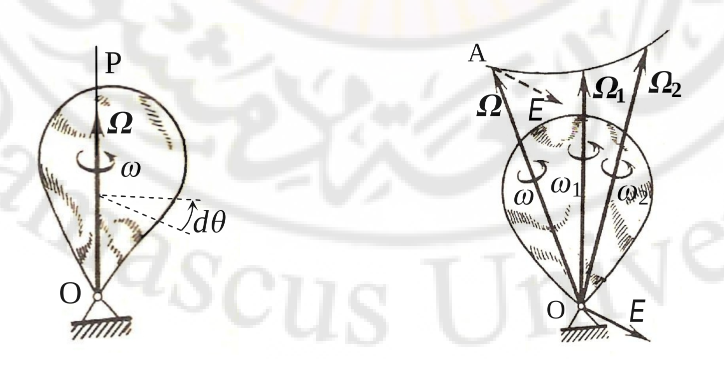
ومنه ينتج:

$$A\hat{D}A_1 = A_1\hat{D}B_1 = \Delta q$$

فإذا دار الجسم حول المحور OD بزاوية $\Delta\theta$ ، فإن المثلث $\Delta\ ADA_1$ ينتقل من مستواه وينطبق على المثلث $\Delta\ A_1DB_1$ ، حيث النقطة A تتخذ الموضع A_1 ، وتتخذ النقطة B الموضع B_1 ، وهكذا يتم فعلاً انتقال الجسم من الوضع I إلى الوضع II ، بإزاحة دورانية واحدة حول المحور OD بزاوية $\Delta\theta$.

إلا أنه لا ينتج من هذا أن حركة الجسم خلال الفترة الزمنية ($\Delta t = t_2 - t_1$) تمثل بالفعل هذا الدوران، فقد ينتقل الجسم من الموضع I إلى الموضع II بأي طريقة أخرى، وكلما صغرت الفترة الزمنية Δt ، أي كلما كان الموضعان I و II قريبين أحدهما إلى الآخر، كانت الإزاحة الدورانية حول المحور OD بزاوية $\Delta\theta$ أقرب إلى إزاحة الجسم الحقيقية.

وإذا آلت الفترة الزمنية Δt إلى الصفر، فإن اتجاه المحور OD يقترب من وضع نهائي ما OP ، يسمى بالمحور اللحظي أو الآني لدوران الجسم، الذي يمثل المحل الهندسي لنقاط الجسم التي سرعاتها في اللحظة المعطاة معدومة، وينتقل الجسم بإدارته حول هذا المحور بزاوية أولية $\Delta\theta$ تؤول إلى الصفر، من موضعه المعطى إلى الوضع المجاور والقريب قرباً لا نهائياً من الوضع المعطى، والسرعة الزاوية التي يحدث بها هذا الدوران هي عبارة عن السرعة الزاوية المطلقة للجسم w في اللحظة الزمنية المعطاة t ، ومتجهه W الذي لا يبقى ثابتاً في الاتجاه، يتجه على امتداد المحور OP كما هو مبين في (الشكل-2a-5-2).



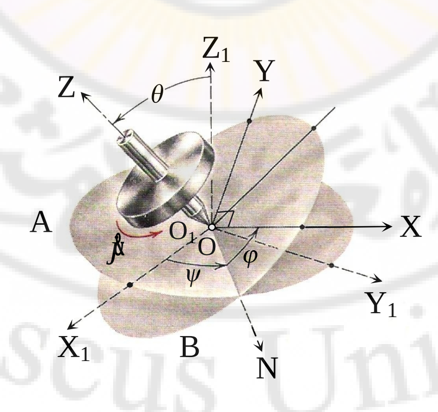
(الشكل-2-5-2)

ويختلف المحور اللحظي للدوران عن المحور الثابت، في أن اتجاه الأول في الفراغ وفي نفس الجسم يتغير طوال الوقت بتغير الزمن، وبالتالي يمكن تصور حركة الجسم الصلب حول نقطة ثابتة منه كعدة دورانات أولية متتالية بسرعة زاوية w حول مجموعة من المحاور اللحظية للدوران المارة بالنقطة الثابتة كما هو مبين في (الشكل-5-2b)، وتشكل الأوضاع المتتالية التي يأخذها المحور اللحظي للدوران عند ذلك سطحاً مخروطياً، وترسم A نهاية المتجه W منحنياً ما على هذا السطح.

3- معادلات الحركة *Equation of Motion*

تحرى العالم أويلر حركة الجسم الصلب حول نقطة ثابتة منه O ، ووجد أنها تحتاج لتعيينها إلى ثلاثة وسطاء.

نأخذ مثلاً حركة جسم صلب على شكل المغزل الدوار المرتبط بجملة إحداثية ثلاثية قائمة ومباشرة $T(O_1XYZ)$ ، ينطبق مبدؤها O_1 على النقطة الثابتة O ، ونرجع حركة الجسم إلى جملة إحداثية ثلاثية ثابتة قائمة ومباشرة $T_1(O_1X_1Y_1Z_1)$ ، ينطبق مبدؤها O_1 أيضاً على النقطة الثابتة. عندئذ تؤول حركة الجسم الصلب إلى حركة الجملة الإحداثية T بدلالة الجملة الإحداثية الثابتة T_1 ، ونفرض في اللحظة t_0 أن الجملة T كانت منطبقة على الجملة T_1 ، وتأخذ في اللحظة t_1 وضعاً كما هو موضح في (الشكل-5-3).



(الشكل-5-3)

ففي الحالة العامة يحتوي المستوي $B(O_1XY)$ على النقطة الثابتة O من محور المغزل الدوار OZ ، الذي يكون دوماً عمودياً عليه، ولا ينطبق على المستوي $A(O_1X_1Y_1)$ المحدد بالمحورين O_1Y_1 و O_1X_1 وعلى النقطة الثابتة أيضاً، وليكن O_1N الفاصل المشترك بين هذين المستويين، والذي يعامد كلاً من المحورين O_1Z_1 و O_1Z ، فهو يعامد المستوي ZO_1Z_1 ، بالتالي فإن وضعية الجملة المتحركة T بالنسبة للجملة الثابتة T_1 تتعين بتسعة تجيبات موجهة للمحاور المتحركة، أي بتجيبات تلك الزوايا التي تشكلها كل من المحاور المتحركة مع المحاور الثابتة.

لكنه من الأبسط والأسهل تعيين وضعية الجملة T بالنسبة للجملة T_1 بواسطة زوايا أولر، وهم:

الزاوية θ المحصورة بين المحورين $\theta (O_1Z_1 , O_1Z)$ ، وتدعى بزاوية التأرجح (*Nutation Angle*)، حيث تقيس ميل المحور الدوار O_1Z عن المحور الشاقولي O_1Z_1 ، وكما يتضح من الشكل أنها تقيس أيضاً الزاوية المحصورة بين المستويين A و B ، بالتالي يوجه المحور O_1N بشكل تكون معه θ مباشرة، ويدعى بالمحور الرأسي أو محور العقد.

الزاوية ψ المحصورة بين المحورين $\psi (O_1X_1 , O_1N)$ ، وتدعى بزاوية التقدم (*Precession Angle*)، حيث تعين الإزاحة الزاوية لمحور المغزل الدوار في المستوي B .

الزاوية φ المحصورة بين المحورين $\varphi (O_1N , O_1X)$ ، وتدعى بزاوية الدوران الآني (*Spin Angle*).

تعين الزاويتان θ و ψ موضع محور المغزل الدوار تماماً، أي بمعنى آخر موضع الجسم الصلب، وتكفي الوسطاء الثلاثة θ و ψ و φ في تحديد وضع الثلاثية T بدلالة الثلاثية T_1 ، بالفعل:

إذا علمنا الزاوية ψ أنشأنا في المستوي $O_1X_1Y_1$ المحور O_1N بشكل تكون معه الزاوية:

$$\psi = (O_1X_1 , O_1N) \qquad (1-5)$$

والزاوية ψ الموجبة هي الزاوية المباشرة حول O_1Z_1 ، أي عندما يدور المحور O_1N بعكس حركة عقارب الساعة بالنسبة لناظر ينظر من النهاية الموجبة للمحور O_1Z_1 .

وإذا علمنا الزاوية θ أنشأنا المحور O_1Z ، ويتم ذلك بأن ننشئ من O_1 مستوياً يعامد O_1N ويمر من O_1Z_1 ، ثم نرسم من O_1 المحور O_1Z في المستوي المنشأ بشكل تكون معه الزاوية:

$$\theta = (O_1Z_1 , O_1Z) \tag{2-5}$$

والزاوية θ الموجبة هي الزاوية المباشرة حول O_1N ، أي عندما يدور المحور O_1Z بعكس حركة عقارب الساعة بالنسبة لناظر ينظر من النهاية الموجبة للمحور $\mathbf{O_1N}$.

وإذا علمنا الزاوية φ أنشانا من O_1 المستوي B العمودي على المحور $\mathbf{O_1Z}$ ، ويمر من $\mathbf{O_1N}$ ، ثم نرسم من O_1 المحور O_1X في المستوي المنشأ بشكل تكون معه الزاوية:

$$\varphi = (\mathbf{O_1N} , \mathbf{O_1X}) \tag{3-5}$$

والزاوية φ الموجبة هي الزاوية المباشرة حول $\mathbf{O_1Z}$ ، أي عندما يدور المحور $\mathbf{O_1X}$ بعكس حركة عقارب الساعة، بالنسبة لناظر ينظر من النهاية الموجبة للمحور $\mathbf{O_1Z}$.

ونرسم أخيراً من O_1 في المستوي العمودي على المحور الدوار $\mathbf{O_1Z}$ ، المحور O_1Y بشكل:

$$(\mathbf{O_1X} , \mathbf{O_1Y}) = \pi / 2$$

والزاوية $\pi / 2$ الموجبة هي الزاوية المباشرة حول $\mathbf{O_1Z}$.

بالتالي تشكل الجملة O_1XYZ ثلاثية قائمة مباشرة، فإذا أعطيت التوابع:

$$q = f_1(t) \quad , \quad y = f_2(t) \quad , \quad j = f_3(t) \tag{4-5}$$

أمكن في كل لحظة t إنشاء الثلاثية المتحركة T ، أي تحديد وضع الجسم الصلب بدلالة الجملة الثابتة T_1 ، وتكون الزوايا مستقلة عن بعضها بعضاً، وتسمى بزوايا أويلر (*Euler's Angeles*).

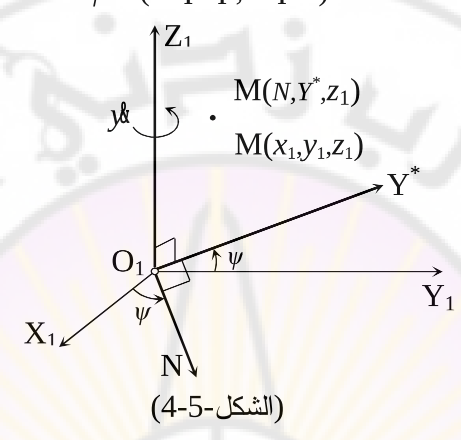
4- العلاقات بين مجموعة الإحداثيات المتحركة ومجموعة الإحداثيات الثابتة

من الممكن نقل مجموعة من الإحداثيات منطبقة على الإحداثيات الثابتة $T_1(O_1X_1Y_1Z_1)$ ، إلى الوضع النهائي المعين بالإحداثيات المتحركة $T(O_1XYZ)$ ، وذلك بدوران الجملة الثابتة ثلاث مرات.

لذا نعد جسيماً M من الجسم، إحداثياته بدلالة الجملة المتحركة T المقيدة بالجسم هي x , y , z ، وإحداثياته بدلالة الجملة الثابتة T_1 هي x_1 , y_1 , z_1 ، حيث:

الدوران الأول يتم بدوران الجملة الثابتة T_1 حول المحور $\mathbf{O_1Z_1}$ ، ونعد الثلاثية المساعدة القائمة والمباشرة $O_1Z_1NY^*$ الموضحة في (الشكل-5-4)، حيث $\mathbf{O_1Y^*}$ يقع في المستوي $O_1X_1Y_1$ ، ويعامد $\mathbf{O_1N}$ ، وتكون الزاوية:

$$\psi = (\ \mathbf{O_1X_1}\ ,\ \mathbf{O_1N}\ )$$



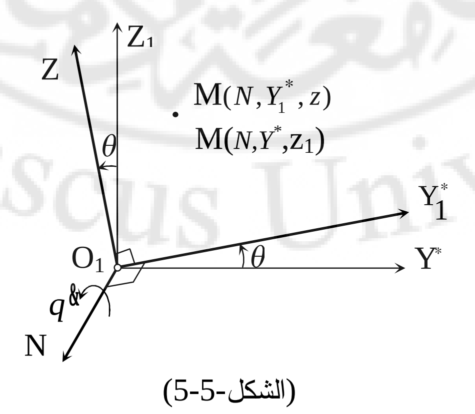
(الشكل-5-4)

من (الشكل-5-4) نحصل على:

$$\begin{aligned} x_1 &= N.\cos y\ - Y^*.\sin y \\ y_1 &= N.\sin y\ + Y^*.\cos y \\ z_1 &= z_1 \end{aligned} \qquad (5\text{-}5)$$

والدوران الثاني يتم بدوران الجملة المساعدة $O_1Z_1NY^*$ حول المحور $\mathbf{O_1N}$ ، ونعد الثلاثية المساعدة القائمة والمباشرة $O_1ZNY_1^*$ الموضحة في (الشكل-5-5)، حيث $O_1Y_1^*$ يقع في المستوي $O_1Z_1Y^*$ ، وعمودي على المحور O_1Z ، وتكون الزاوية:

$$\theta = (\ \mathbf{O_1Z_1}\ ,\ \mathbf{O_1Z}\ )$$



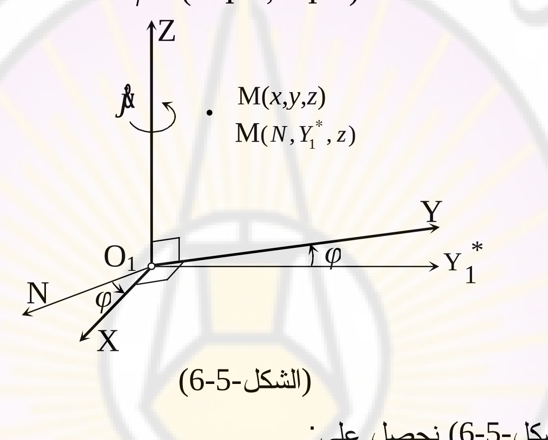
(الشكل-5-5)

من (الشكل-5-5-5) نحصل على:

$$\begin{aligned} Y^{*} &= Y_1^{*}.\cos\theta - z.\sin\theta \\ z_1 &= Y_1^{*}\sin\theta + z.\cos\theta \\ N &= N \end{aligned} \qquad (6\text{-}5)$$

والدوران الثالث يتم بدوران الجملة المساعدة $O_1ZNY_1^{*}$ حول المحور $\mathbf{O_1Z}$ ، ونعد أخيراً الثلاثية القائمة والمباشرة O_1XYZ الموضحة في (الشكل-5-5-6)، حيث المستوي O_1XY ينطبق على المستوي $O_1NY_1^{*}$ فهو يعامد $\mathbf{O_1Z}$ ، وتكون الزاوية:

$$\varphi = (\mathbf{O_1N}, \mathbf{O_1X})$$



(الشكل-5-5-6)

من (الشكل-5-5-6) نحصل على:

$$\begin{aligned} N &= x.\cos\varphi - y.\sin\varphi \\ Y_1^{*} &= x.\sin\varphi + y.\cos\varphi \\ z &= z \end{aligned} \qquad (7\text{-}5)$$

بحذف الإحداثيات المساعدة Y_1^{*}, Y^{*}, N من مجموعة العلاقات الثلاثة الأخيرة، نحصل على:

$$\begin{aligned} x_1 &= (\cos\varphi.\cos\psi - \sin\varphi.\sin\psi.\cos\theta)x \\ &\quad + (-\sin\varphi.\cos\psi - \cos\varphi.\cos\theta.\sin\psi)y + (\sin\theta.\sin\psi)z \\ y_1 &= (\cos\varphi.\sin\psi + \sin\varphi.\cos\psi.\cos\theta)x \\ &\quad + (-\sin\varphi.\sin\psi + \cos\varphi.\cos\psi.\cos\theta)y + (-\sin\theta.\cos\psi)z \\ z_1 &= (\sin\varphi.\sin\theta)x + (\cos\varphi.\sin\theta)y + (\cos\theta)z \end{aligned} \qquad (8\text{-}5)$$

إحداثيات الجسيم M من الجسم الصلب بدلالة الجملة الثابتة T_1 ، وذلك بدلالة الوسطاء θ و ψ و φ ، وبدلالة الإحداثيات x, y, z .

لدينا من جهة ثانية أن:

$$\mathbf{O_1M} = x.\boldsymbol{i} + y.\boldsymbol{j} + z.\boldsymbol{k} \qquad (9\text{-}5)$$

نسقط العلاقة على جملة المحاور الإحداثية الثابتة T_1 ، نحصل على:

$$\begin{aligned} x_1 &= x.\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i_1} + y.\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i_1} + z.\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i_1} \\ y_1 &= x.\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j_1} + y.\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j_1} + z.\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j_1} \\ z_1 &= x.\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k_1} + y.\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k_1} + z.\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k_1} \end{aligned} \qquad (10\text{-}5)$$

فإذا قارنا العلاقات (5-10) مع العلاقات (5-8) حصلنا على التجيبات الموجهة لمحاور الجملة المتحركة T بدلالة الجملة الثابتة T_1 ، وذلك بعد الأخذ بالحسبان أن:

$$\boldsymbol{i}(a_1, b_1, g_1) \quad , \quad \boldsymbol{j}(a_2, b_2, g_2) \quad , \quad \boldsymbol{k}(a_3, b_3, g_3)$$

يكون:

$$\begin{aligned} a_1 &= \boldsymbol{i}.\boldsymbol{i_1} = \cos j.\cos y - \sin j.\sin y.\cos q \\ b_1 &= \boldsymbol{i}.\boldsymbol{j_1} = \cos j.\sin y + \sin j.\cos y.\cos q \\ g_1 &= \boldsymbol{i}.\boldsymbol{k_1} = \sin j.\sin q \\ a_2 &= \boldsymbol{j}.\boldsymbol{i_1} = -\sin j.\cos y - \cos j.\sin y.\cos q \\ b_2 &= \boldsymbol{j}.\boldsymbol{j_1} = -\sin j.\sin y + \cos j.\cos y.\cos q \\ g_2 &= \boldsymbol{j}.\boldsymbol{k_1} = \cos j.\sin q \quad , \quad g_3 = \boldsymbol{k}.\boldsymbol{k_1} = \cos q \\ a_3 &= \boldsymbol{k}.\boldsymbol{i_1} = \sin y.\sin q \quad , \quad b_3 = \boldsymbol{k}.\boldsymbol{j_1} = -\cos y.\sin q \end{aligned} \qquad (11\text{-}5)$$

إن لزوايا أولر في دراسة العلاقات الحركية وإيجادها، السرعة والتسارع، تطبيقات مهمة في حركة الجيروسكوب التي سنراها بالتفصيل في دراسات مقبلة، إذ من الصعب جداً فهم حركة الجيروسكوب بصورة جيدة إذا لم يفهم تماماً الشكل الهندسي للعلاقات المستخرجة من هذه الفقرات.

5- الثلاثية المتحركة

نفترض أن الجملة الإحداثية الثابتة $T_1(O_1X_1Y_1Z_1)$ ، حيث $\boldsymbol{i_1}$, $\boldsymbol{j_1}$, $\boldsymbol{k_1}$ المتجهات الواحدية لمحاورها، ولتكن الجملة الإحداثية المتحركة $T(O_1XYZ)$ ، حيث $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ المتجهات الواحدة لمحاورها، ومبدؤها ينطبق على مبدأ الجملة T_1 ، ويمكن أن نكتب:

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = a_{11}.\boldsymbol{i} + a_{12}.\boldsymbol{j} + a_{13}.\boldsymbol{k}$$
$$\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = a_{21}.\boldsymbol{i} + a_{22}.\boldsymbol{j} + a_{23}.\boldsymbol{k} \qquad (12\text{-}5)$$
$$\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = a_{31}.\boldsymbol{i} + a_{32}.\boldsymbol{j} + a_{33}.\boldsymbol{k}$$

حيث الأمثال a_{gh} توابع للزمن، وتمثل مركبات المشتق على المحاور الإحداثية المتحركة، ولتحديدها لدينا:

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = 1 \qquad (13\text{-}5)$$
$$\boldsymbol{i}.\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}.\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}.\boldsymbol{i} = 0 \qquad (14\text{-}5)$$

نشتق العلاقة (5-13) بدلالة الزمن:

$$\boldsymbol{i}.\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \boldsymbol{j}.\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = \boldsymbol{k}.\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = 0$$

بالعودة إلى العلاقات (5-12)، ينتج:

$$a_{11}.\boldsymbol{i}^2 + a_{12}(\boldsymbol{i}.\boldsymbol{j}) + a_{13}(\boldsymbol{i}.\boldsymbol{k}) = 0$$
$$a_{21}(\boldsymbol{j}.\boldsymbol{i}) + a_{22}.\boldsymbol{j}^2 + a_{23}(\boldsymbol{j}.\boldsymbol{k}) = 0 \qquad (15\text{-}5)$$
$$a_{32}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{i}) + a_{32}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{j}) + a_{33}.\boldsymbol{k}^2 = 0$$

بالاستناد إلى العلاقتين (5-13) و (5-14) تعطي العلاقات (5-15)، ما يلي:

$$a_{11} = 0 \quad , \quad a_{22} = 0 \quad , \quad a_{33} = 0$$

وباشتقاق احدى علاقات (5-14) بدلالة الزمن:

$$\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}.\boldsymbol{k} + \boldsymbol{i}.\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = 0$$

نبدل في العلاقات (5-12)، وبعد الإصلاح ينتج:

$$a_{23} + a_{32} = 0 \quad , \quad a_{31} + a_{13} = 0 \quad , \quad a_{12} + a_{21} = 0$$

نضع:

$$a_{23} = p \quad , \quad a_{31} = q \quad , \quad a_{12} = r$$

نبدلها في (5-12)، ينتج:

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \qquad r.\boldsymbol{j} - q.\boldsymbol{k}$$

$$\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = -r.\boldsymbol{i} \qquad + p.\boldsymbol{k} \qquad (16\text{-}5)$$

$$\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = q.\boldsymbol{i} - p.\boldsymbol{j}$$

وتعرف العلاقات (5-16) بمعادلات الثلاثية المتحركة، فإذا كانت حركة الجملة T معينة بدلالة الجملة الثابتة T_1 ، كانت عندها التوابع r , q , p معينة بدلالة الزمن، ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل، وبالعكس لو أعطينا r , q , p ثلاثة توابع بدلالة الزمن، فإن ذلك يوافق كل اختيار لهذه القيم حركة خاصة به.

في البرهان أعلاه أجرينا الاشتقاق بدلالة الزمن t ، في حين كانت المناقشة أعلاه لا تتعرض لــ t على أنها زمن، ويمكن الاشتقاق بدلالة أي وسيط أردنا، ونحصل عندها على علاقات مطابقة للعلاقات (5-16).

6- السرعة الزاوية ***Angular Velocity***

إذا فرضنا أن الثلاثية T المقيدة بجسم المغزل الدوار في حالة حركة، وانتقلت محاورها من الوضع φ , ψ , θ إلى الوضع $\varphi+d\varphi , \psi+d\psi , \theta+d\theta$ ، حصلنا على ثلاثة دورانات حول المحاور $\mathbf{O_1Z} , \mathbf{O_1N} , \mathbf{O_1Z_1}$ ، فهناك إذن ثلاث سرع زاوية هي $\dot{j},\dot{y},\dot{q}$ التي تعين كل منها على الترتيب معدل التأرجح والتقدم والدوران لجسم المغزل الدوار، حيث $\dot{j}$ محمولة على $\mathbf{O_1Z}$ و $\dot{q}$ محمولة على $\mathbf{ON}$ و $\dot{y}$ محمولة على $\mathbf{O_1Z_1}$ ، كما هو مبين في (الشكل-5-7).

لتكن $\boldsymbol{k} , \boldsymbol{u} , \boldsymbol{k_1}$ المتجهات الواحدية للمحاور $\mathbf{O_1Z} , \mathbf{O_1N} , \mathbf{O_1Z_1}$ ، بحيث التجيبات الموجهة لــ $\boldsymbol{k_1}$ بدلالة جملة محاور الثلاثية T ، هي:

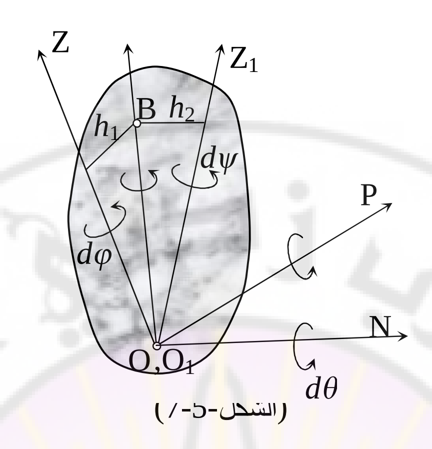
$$\sin q.\sin j \quad , \quad \sin q.\cos j \quad , \quad \cos q$$

والتجيبات الموجهة لــ $\boldsymbol{u}$ بدلالة الجملة T ، هي:

$$\cos j \quad , \quad -\sin j \quad , \quad 0$$

والتجيبات الموجهة لــ $\boldsymbol{k}$ بدلالة الجملة T ، هي:

$$0 \quad , \quad 0 \quad , \quad 1$$



(الشكل-5-7)

ومتجه الدوران الآني $\boldsymbol{\Omega}$ الذي يتجه على امتداد المحور الآني للدوران، هو المجموع الهندسي لمتجهات الدوران الثلاثة:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}.\boldsymbol{k_1} + \dot{\theta}.\boldsymbol{u} + \dot{\varphi}.\boldsymbol{k} \tag{17-5}$$

وبالتعويض ينتج:

$$\boldsymbol{\Omega} = (\sin\theta.\sin\varphi.\dot{\psi})\boldsymbol{i} + (\sin\theta.\cos\varphi.\dot{\psi})\boldsymbol{j} + (\cos\theta.\dot{\psi})\boldsymbol{k}$$
$$+ (\cos\varphi.\dot{\theta})\boldsymbol{i} - (\sin\varphi.\dot{\theta})\boldsymbol{j} + \dot{\varphi}.\boldsymbol{k}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} = & (\sin\theta.\sin\varphi.\dot{\psi} + \cos\varphi.\dot{\theta})\boldsymbol{i} \\ & + (\sin\theta.\cos\varphi.\dot{\psi} - \sin\varphi.\dot{\theta})\boldsymbol{j} \\ & + (\cos\theta.\dot{\psi} + \dot{\varphi})\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{18-5}$$

وبفرض $\boldsymbol{\Omega}$ المتجه الذي مركباته على محاور الجملة الإحداثية المتحركة T هي $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$ ، أي:

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega_X.\boldsymbol{i} + \omega_Y.\boldsymbol{j} + \omega_Z.\boldsymbol{k} \tag{19-5}$$

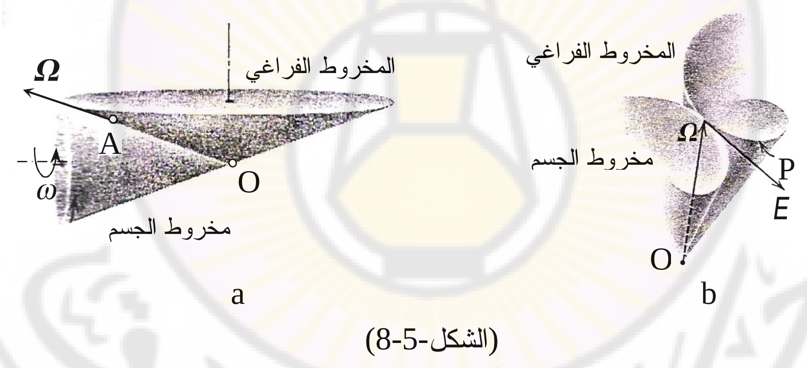
بمقارنة (5-19) مع (5-18) ينتج:

$$\begin{aligned} \omega_X &= \sin\theta.\sin\varphi.\dot{\psi} + \cos\varphi.\dot{\theta} \\ \omega_Y &= \sin\theta.\cos\varphi.\dot{\psi} - \sin\varphi.\dot{\theta} \\ \omega_Z &= \cos\theta.\dot{\psi} + \dot{\varphi} \end{aligned} \tag{20-5}$$

وتحدد العلاقات (5-20) مركبات متجه الدوران الآني $\boldsymbol{\Omega}$ على جملة المحاور الإحداثية المتحركة T ، التي تتعين بمعرفة معادلات الحركة الكروية (5-4).

بحركة الجسم حول النقطة الثابتة يغيِّر المحور الآني للدوران OP موضعه، ويكون محله الهندسي في الفراغ الثابت أي الجملة T_1 عبارة عن سطح مخروط ينطبق رأسه على النقطة الثابتة O ، ويدعى بالمخروط الفراغي الثابت (*Space Cone*)، أما محله الهندسي في الجسم الصلب، أي في الفراغ المتحرك، أي الجملة T ، فهو عبارة عن سطح مخروط ينطبق رأسه أيضاً على النقطة الثابتة O ، ويدعى بمخروط الجسم المتحرك (*Body Cone*) كما هو مبين في (الشكل-5-8a)، وهذان المخروطان يتماسان على طول محور الدوران الآني، وخلال حركة الجسم الصلب حول النقطة الثابتة، فإنه يبدو كما لو أن مخروط الجسم يتدحرج على المخروط الفراغي الثابت.

ففي الحالة الخاصة عندما يكون الدوران ثابتاً تكون مخروطات الجسم والفراغ قائمة، ويبقى مخروط الجسم يتدحرج على مخروط الفراغ، أما في الحالة العامة عندما يكون الدوران غير ثابت، لن تكون مخروطات الجسم والفراغ قائمة كما هو مبين في (الشكل-5-8b)، ولكن يبقى مخروط الجسم يتدحرج على مخروط الفراغ.



(الشكل-5-8)

إذا كان مخروط الجسم خارجياً بالنسبة للمخروط الفراغي كما في (الشكل-5-8b)، تعرف الحركة بالتقدم المباشر (*Direct Precession*)، أما إذا وقع المخروط الفراغي ضمن مخروط الجسم فتعرف بالحركة المتراجعة (*Retrograde Precession*)، ستدرس هذه الحركات مرة ثانية بتفصيل أكبر عند دراسة حركة الجيروسكوب.

تطبيق ذلك على الحركة المستوية، حيث يبقى الجسم المتحرك موازياً لمستوٍ ثابت، فيمكن افتراض كونه يدور حول نقطة ثابتة تقع في اللانهاية، ويصبح عندئذ مخروطي الجسم والفراغ كأسطوانتين تتقاطعان مع مستوي الحركة بمنحنيين هما المحل الهندسي في الجسم، أي المرتكز المتحرك، والمحل الهندسي الفراغي، أي المرتكز الثابت، المار ذكرهما في الحركة المستوية العامة، وتمثل نقطة تقاطع المحور الآني للدوران مع مستوي الحركة المركز الآني I للسرع المعدومة.

7- التسارع الزاوي *Angular Acceleration*

في أثناء حركة الجسم يتغير متجه السرعة الزاوية $\boldsymbol{\Omega}$ بالقيمة والاتجاه، وبفرض أن متجهي السرعة الزاوية في اللحظتين الزمنيتين t و $t+dt$ هما $\boldsymbol{\Omega}$ و $\boldsymbol{\Omega_1}$ كما هو مبين في (الشكل-5-9a)، عندئذ المتجه $\boldsymbol{\Delta\Omega}$ يمثل تزايد متجه السرعة الزاوية الموافق للفترة Δt ، وتسمى النسبة:

$$E_{av} = \frac{\Delta\boldsymbol{\Omega}}{\Delta t}$$

بمتجه التسارع الزاوي الوسطي، وعندما تتناهى Δt إلى الصفر نحصل على متجه التسارع الزاوي الآني:

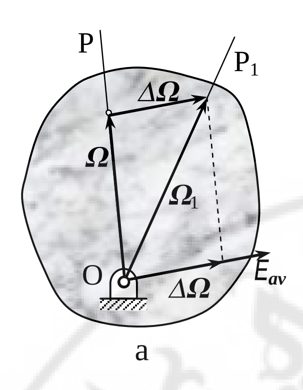
$$E = \lim_{\Delta t\to 0} E_{av} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\Omega}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}$$

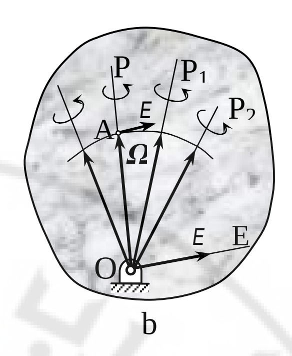
فمتجه التسارع الزاوي E لجسم صلب يتحرك في الفراغ، هو مشتق متجه السرعة الزاوية $\boldsymbol{\Omega}$ بالنسبة للزمن، ويمثل التغير في اتجاه $\boldsymbol{\Omega}$ وفي مقدارها ω أيضاً، وبالمقارنة مع حالة الدوران في الحركة المستوية حيث تقيس القيمة العددية للتسارع الزاوي ε فقط التغير في مقدار السرعة الزاوية ω .

وبما أن متجه السرعة الزاوية $\boldsymbol{\Omega}$ ليس ثابتاً في المنحى، فمشتقه E لا يوازيه، فإذا رسمنا من O المتجهات ($\mathbf{OA} = \boldsymbol{\Omega}$) الموافقة لمختلف الأزمنة t كما هو مبين في (الشكل-5-9b)، رسمت النقطة A نهاية المتجه $\boldsymbol{\Omega}$ خطاً منحنياً فراغياً يسمى براسم خطى متجه السرعة الزاوية، وإذا كان $\boldsymbol{\Omega}$ نصف قطر شعاعي للنقطة A فيكون متجه سرعتها $\boldsymbol{U}$ على مسارها يساوي:

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{A}} = \frac{d}{dt}\mathbf{OA} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{\Omega} = E \qquad (21\text{-}5)$$

ويتجه مماساً على المنحني المرسوم برؤوس متجهات السرعة الزاوية $\boldsymbol{\Omega}$ ، واتجاهه يساير متجه التسارع الزاوي الآني E الذي يساوي هندسياً متجه سرعة النقطة A ، ومحمول على المحور OE المسمى بمحور التسارع الزاوي، وأنه لا ينطبق على منحى متجه السرعة الزاوية الآنية $\boldsymbol{\Omega}$ ، وذلك على عكس الدوران حول محور ثابت، الذي يعد حالة خاصة من هذه الحالة.



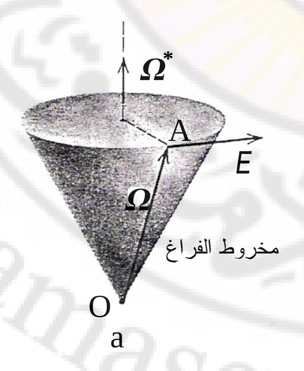


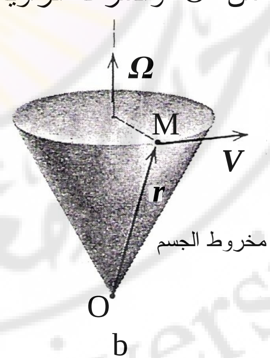
(الشكل-5-9)

وعندما يبقى مقدار ω ثابتاً فإن متجه التسارع الزاوي E يصبح عمودياً على متجه السرعة الزاوية $\boldsymbol{\Omega}$ ، وفي هذه الحالة إذا كان المتجه $\boldsymbol{\Omega}^*$ يمثل السرعة الزاوية التي يدور بها المتجه $\boldsymbol{\Omega}$ عند تشكيل مخروط الفراغ، عندئذ تصبح علاقة التسارع الزاوي بالشكل:

$$E = \boldsymbol{\Omega}^* \wedge \boldsymbol{\Omega} \tag{22-5}$$

يمكن رؤية هذه العلاقة بوضوح في (الشكل-5-10)، حيث إن العلاقة بين المتجهات E و $\boldsymbol{\Omega}$ و $\boldsymbol{\Omega}^*$ في (الشكل-5-10a) هي تماماً العلاقة نفسها بين المتجهات $\boldsymbol{\Omega}$ و $\boldsymbol{V}$ و $\boldsymbol{r}$ في (الشكل-5-10b)، التي تحدد علاقة سرعة النقطة M على جسم صلب بالنسبة لمتجه وضعها من O والسرعة الزاوية للجسم.





(الشكل-5-10)

أما القيمة العددية للتسارع الزاوي الآني فيمكن تعيينها بمعرفة معادلات الحركة الكروية (5-4)، من العلاقة:

$$e = \frac{d}{dt}w \tag{23-5}$$

كما يمكن تعيين طول المتجه E بسهولة، وذلك إذا عرفت مساقطه على المحاور الإحداثية لمتحركة T ، فمن العلاقة (5-23) ينتج أن مساقط التسارع الزاوي على محاور الإحداثيات المتحركة تساوي مشتقات المساقط المناسبة لمتجه السرعة الزاوية على المحاور نفسها بالنسبة للزمن، أي:

$$e_{\mathrm{X}} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}} w_{\mathrm{X}} \quad , \quad e_{\mathrm{Y}} = \frac{d}{dt} w_{\mathrm{Y}} \quad , \quad e_{\mathrm{Z}} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}} w_{\mathrm{Z}} \qquad (24\text{-}5)$$

8- السرعة الخطية

إذا كان الجسيم M أحد جسيمات الجسم المادية، فيعين مكانه بدلالة الجملة المتحركة T المقيدة بالجسم المادي، بمتجه يمثل نصف القطر الشعاعي للجسيم **OM** المحدد بالعلاقة:

$$\mathbf{OM} = x.\boldsymbol{i} + y.\boldsymbol{j} + \mathrm{z}.\boldsymbol{k} \qquad (25\text{-}5)$$

حيث x , y , z تمثل إحداثيات الجسيم M بدلالة الثلاثية المتحركة T ، وهي ثابتة بدلالة الزمن، لأن الثلاثية T مقيدة بالجسم الصلب.

من جهة أخرى لدينا:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i} &= a_1.\boldsymbol{i_1} + b_1.\boldsymbol{j_1} + g_1.\boldsymbol{k_1} \\ \boldsymbol{j} &= a_2.\boldsymbol{i_1} + b_2.\boldsymbol{j_1} + g_2.\boldsymbol{k_1} \\ \boldsymbol{k} &= a_3.\boldsymbol{i_1} + b_3.\boldsymbol{j_1} + g_3.\boldsymbol{k_1} \end{aligned} \qquad (26\text{-}5)$$

نشتق العلاقة (5-25) بدلالة الزمن:

$$\boldsymbol{V_{\mathrm{M}}} = \frac{d}{dt}\mathbf{OM} = x.\dot{\boldsymbol{i}} + \mathrm{y}.\dot{\boldsymbol{j}} + z.\dot{\boldsymbol{k}} \qquad (27\text{-}5)$$

ويتعين متجه السرعة $\boldsymbol{V_{\mathrm{M}}}$ متى حسبنا المشتقات $\dot{\boldsymbol{i}}, \dot{\boldsymbol{j}}, \dot{\boldsymbol{k}}$ ، إلا أن الاشتقاق المطلوب طويل وممل، ويمكن الحصول على المتجه $\boldsymbol{V_{\mathrm{M}}}$ بطريقة مباشرة أبسط وأسرع من الطريقة المذكورة أعلاه.

بالفعل، وبفرض W متجه السرعة الزاوية المطلقة الذي مركباته على محاور الجملة الإحداثية T هي p , q , r ، أي:

$$\boldsymbol{\Omega} = p.\boldsymbol{i} + q.\boldsymbol{j} + r.\boldsymbol{k} \tag{28-5}$$

يمكن كتابة ما يلي:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{i} &= (p.\boldsymbol{i} + q.\boldsymbol{j} + r.\boldsymbol{k}) \wedge \boldsymbol{i} = \quad r.\boldsymbol{j} - q.\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{j} &= (p.\boldsymbol{i} + q.\boldsymbol{j} + r.\boldsymbol{k}) \wedge \boldsymbol{j} = -r.\boldsymbol{i} + p.\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{k} &= (p.\boldsymbol{i} + q.\boldsymbol{j} + r.\boldsymbol{k}) \wedge \boldsymbol{k} = \quad q.\boldsymbol{i} - p.\boldsymbol{j} \end{aligned} \tag{29-5}$$

بالمقارنة مع علاقات الثلاثية المتحركة (16-5) يكون:

$$\begin{aligned} r.\boldsymbol{j} - q.\boldsymbol{k} &= \dot{\boldsymbol{i}} \\ -r.\boldsymbol{i} + p.\boldsymbol{k} &= \dot{\boldsymbol{j}} \\ q.\boldsymbol{i} - p.\boldsymbol{j} &= \dot{\boldsymbol{k}} \end{aligned} \tag{30-5}$$

نبدل هذه المعادلات بالمعادلة (27-5) نحصل على:

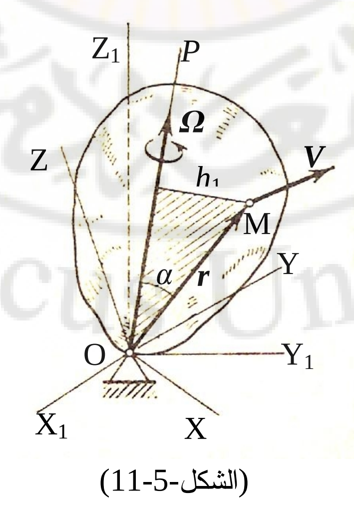
$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}} = x.\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{i} + y.\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{j} + z.\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{k} = \boldsymbol{\Omega} \wedge (x.\boldsymbol{i} + y.\boldsymbol{j} + z.\boldsymbol{k}) \tag{31-5}$$

أي:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM} \tag{32-5}$$

منه يمكن تعيين سرعة أي جسيم M كما هو مبين في (الشكل-5-11)، كسرعته المحيطية الناتجة عن الحركة الدورانية حول المحور الآني OP ، وتحدد قيمته العددية بحاصل الضرب الشعاعي للعلاقة (31-5):

$$V_{\mathrm{M}} = w.r.\sin a = w.h_1 \tag{33-5}$$



(الشكل-5-11)

حيث h_1 تمثل بعد الجسيم عن محور الدوران الآني OP ، ومقداره يتغير بمرور الزمن، ويتجه متجه السرعة $\boldsymbol{V}_\mathbf{M}$ عمودياً على المستوي MOP المار بالمحور الآني للدوران والجسيم M ، إلى ناحية دوران الجسم، إلا أن المقدار h_1 يتغير بمرور الزمن، بالتالي لا يمكننا تعيين تسارع الجسيم من هذه المعادلة.

وتشبه العلاقة (5-32) علاقة توزع السرعات في الحركة الدورانية لجسم صلب حول محور يمر من O ويوازي $\boldsymbol{\Omega}$. نسمي هذا المحور كما ذكرنا بالمحور الآني للدوران، لأنه في كل لحظة t يوجد متجه $\boldsymbol{\Omega}$ يمر من O ، ولأن $\boldsymbol{\Omega}$ تتحول مع $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ التي تتحول بدورها مع $\varphi\,,\,\psi\,,\,\theta$ ، وهكذا نلاحظ أن توزع سرعات جسيمات الجسم في حركته الكروية وفي اللحظة المعطاة t ، يشابه توزع السرعات في الحركة الدورانية حول محور ثابت.

كما يمكن تعيين سرعة أي جسيم $\boldsymbol{V}_\mathbf{M}$ تحليلياً، بدلالة مساقطه على أي من محاور الإحداثيات، فنعين مركبات السرعة $\boldsymbol{V}_\mathbf{M}$ بدلالة الجملة الإحداثية T ، المثبتة تثبيتاً صلباً بالجسم والمتحركة معه، حيث تعطينا العلاقة (5-32):

$$\boldsymbol{V}_\mathbf{M} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ w_\mathrm{X} & w_\mathrm{Y} & w_\mathrm{Z} \\ x & y & z \end{vmatrix} \qquad (34\text{-}5)$$

أي:

$$\boldsymbol{V}_\mathbf{M} = (w_\mathrm{Y}.z - w_\mathrm{Z}.y)\,\boldsymbol{i} + (w_\mathrm{Z}.x - w_\mathrm{X}.z)\,\boldsymbol{j} + (w_\mathrm{X}.y - w_\mathrm{Y}.x)\,\boldsymbol{k} \qquad (35\text{-}5)$$

حيث مركبات السرعة $\boldsymbol{V}_\mathbf{M}$ على جملة المحاور المتحركة T المقيدة بالجسم هي:

$$V_\mathrm{X} = w_\mathrm{Y}.z - w_\mathrm{Z}.y \quad , \quad V_\mathrm{Y} = w_\mathrm{Z}.x - w_\mathrm{X}.z \quad , \quad V_\mathrm{Z} = w_\mathrm{X}.y - w_\mathrm{Y}.x \qquad (36\text{-}5)$$

تدعى هذه العلاقات بمعادلات أويلر الحركية، بالطريقة نفسها يمكن تعيين مركبات السرعة $\boldsymbol{V}_\mathbf{M}$ بدلالة الجملة الإحداثية الثابتة $\mathrm{T_1}$.

$$V_{\mathrm{X}1} = w_{\mathrm{Y}_1}.z_1 - w_{\mathrm{Z}1}.y_1 \;,\; V_{\mathrm{Y}_1} = w_{\mathrm{Z}1}.x_1 - w_{\mathrm{X}1}.z_1 \;,\; V_{\mathrm{Z}1} = w_{\mathrm{X}1}.y_1 - w_{\mathrm{Y}_1}.x_1 \qquad (37\text{-}5)$$

حيث $w_{\mathrm{X}_1}, w_{\mathrm{Y}1}, w_{\mathrm{Z}1}$ تمثل مركبات متجه السرعة الزاوية المطلقة $\boldsymbol{\Omega}$ على محاور الجملة الإحداثية الثابتة $\mathrm{T_1}$ ، و $x_1\,,\,y_1\,,\,z_1$ تمثل إحداثيات الجسيم M بدلالة الثلاثية الثابتة $\mathrm{T_1}$.

وإذا كان الجسيم $M(x , y , z)$ من الجسم يقع على المحور اللحظي للدوران في لحظة مفروضة ما، فإن نصف القطر الشعاعي **OM** والمتجه $\boldsymbol{\Omega}$ ينطبقان على المستقيم نفسه، أي على المحور الآني للدوران، ومنه مساقط هذه السرعة الزاوية على محاور الجملة الإحداثية المتحركة متناسبة، أي:

$$\frac{x}{w_X} = \frac{y}{w_Y} = \frac{z}{w_Z} \qquad (38\text{-}5)$$

مع الأخذ بعين الاهتمام أن سرع الجسيمات الواقعة على المحور الآني للدوران معدومة، وهذا ما نلاحظه في المعادلتين (5-35) و(5-36)، وتحقق المعادلة (5-38) جميع الجسيمات المادية الواقعة في تلك اللحظة الزمنية المفروضة على المحور الآني، تدعى هذه المعادلات بمعادلات المحور الآني للدوران في مجموعة الإحداثيات المتحركة، ويمكن بطريقة مشابهة كتابة معادلة المحور الآني للدوران بالنسبة لمجموعة المحاور الثابتة T_1 .

9- التسارع الخطي

يتم تعيين التسارع الخطي لجسيمات الجسم المتحرك حول النقطة الثابتة منه O ، من اشتقاق المعادلة (5-32) بدلالة الزمن:

$$\boldsymbol{A}_\mathbf{M} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM}) \qquad (39\text{-}5)$$

بالاشتقاق وبإبدال ($d\boldsymbol{\Omega}/dt = E$) نحصل على:

$$\boldsymbol{A}_\mathbf{M} = E \wedge \mathbf{OM} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{V}_\mathbf{M} \qquad (40\text{-}5)$$

ويمكن أن نكتب:

$$\boldsymbol{A}_\mathbf{M} = \boldsymbol{A}_\mathbf{1} + \boldsymbol{A}_\mathbf{2} \qquad (41\text{-}5)$$

ومنه تسارع الجسيم M هو محصلة تسارعين كما هو مبين في (الشكل-5-12):

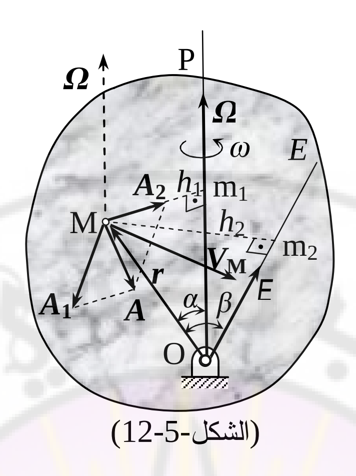
المركبة الأولى $\boldsymbol{A}_\mathbf{1}$ المعينة بالعلاقة:

$$\boldsymbol{A}_\mathbf{1} = E \wedge \mathbf{OM} \qquad (42\text{-}5)$$

تمثل المركبة الدورانية للتسارع، وهي تعامد المستوي المار في الجسيم M ومتجه التسارع الزاوي E ، ولا تنطبق على اتجاه السرعة الخطية $\boldsymbol{V}_\mathbf{M}$ ، وتتجه باتجاه دوران ε حول النقطة الثابتة O ، والقيمة العددية لها هي:

$$A_1 = e.r.\sin b = e.h_2 \qquad (43\text{-}5)$$

حيث ($OM = r$) و ($h_2 = Mm_2$) هو بعد M عن حامل المتجه E .



(الشكل-5-12)

أما المركبة الثانية $\boldsymbol{A_2}$ المعينة بالعلاقة:

$$\boldsymbol{A_2} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{V_M} \tag{44-5}$$

فتمثل المركبة المحورية للتسارع، وتقع في المستوي المار من الجسيم M ومتجه السرعة الزاوية $\boldsymbol{\Omega}$ ، وهي عمودية على كل من المتجه $\boldsymbol{\Omega}$ و $\boldsymbol{V_M}$ ، وتتجه وفق Mm_1 نحو المحور الآني، والقيمة العددية لها هي:

$$A_2 = w.V_M.\sin 90^o = w^2.h_1 \tag{45-5}$$

حيث ($V_M = w\,.\,h_1$) و ($h_1 = Mm_1$) هو بعد M عن محور الدوران الآني $\boldsymbol{\Omega}$.

وتكون القيمة العددية للتسارع الخطي لجسيم من الجسم المتحرك:

$$A_M = [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1.A_2.\cos(\boldsymbol{A_1}\hat{\ }\boldsymbol{A_2})]^{1/2} \tag{46-5}$$

بالتعويض:

$$A_M = [h_1^2.e^2 + h_2^2.w^4 + 2h_1.h_2.e.w^2.\cos(\boldsymbol{A_1}\hat{\ }\boldsymbol{A_2})]^{1/2} \tag{47-5}$$

بسهولة نلاحظ أن هذه العلاقة تنطبق مع العلاقة (3-30) في حالة الدوران حول محور ثابت.

أما العلاقات المعينة لمساقط التسارع $\boldsymbol{A_M}$ للجسيم M على المحاور الإحداثية المتحركة T ، فنحصل عليها من الجداءات الشعاعية للعلاقة (5-40):

$$\begin{aligned} A_x &= e_y\,.\,z - e_z\,.\,y + w_y\,.\,V_z - w_z\,.\,V_y \\ A_y &= e_z\,.\,x - e_x\,.\,z + w_z\,.\,V_x - w_x\,.\,V_z \\ A_z &= e_x\,.\,y - e_y\,.\,x + w_x\,.\,V_y - w_y\,.\,V_x \end{aligned} \tag{48-5}$$

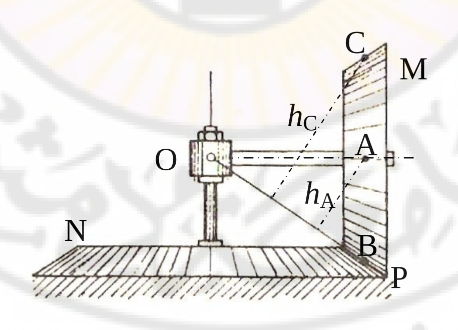
حيث يمكن تعويض قيم مساقط المتجه $\boldsymbol{V_M}$ من العلاقة (5-36) في هذه المعادلات، كذلك بالطريقة نفسها يمكن حساب هذه القيم بدلالة جملة المحاور الثابتة T_1 .

نلاحظ أن متجه السرعة الخطية $\boldsymbol{V}$ ، ومتجه التسارع الخطي $\boldsymbol{A}$ لأي جسيم M في الجسم، تعطى بنفس التعبيرات التي تنطبق في حالة كون المحور ثابتاً، والفرق الوحيد بين حالة الدوران حول محور ثابت، والدوران حول نقطة ثابتة، هو أنه في حالة الدوران حول نقطة ثابتة يكون لمتجه التسارع الزاوي E مركبة عمودية على $\boldsymbol{\Omega}$ بسبب التغير في اتجاه $\boldsymbol{\Omega}$ ، ومركبة في اتجاه $\boldsymbol{\Omega}$ بسبب التغير في القيمة العددية لـــ ω ، وبالرغم من أن سرعة أي نقطة على محور الدوران الآني ستكون في تلك اللحظة معدومة، إلا أن تسارعها في تلك اللحظة لن يكون معدوماً، لأن $\boldsymbol{\Omega}$ غير ثابتة في الاتجاه، وبالمقابل فإنه في حالة الدوران حول محور ثابت، يكون لمتجه التسارع الزاوي E مركبة واحدة في اتجاه المحور الثابت، بسبب التغير في القيمة العددية لـــ $\boldsymbol{\Omega}$ ، كما أن النقط التي تقع على محور الدوران الثابت لن يكون لها سرعة خطية وتسارع خطي.

مسألة 1-5-

يتدحرج المسنن المخروطي M دون انزلاق على سطح مسنن مخروطي آخر ثابت N ، في التركيبة المبينة في (الشكل-5-13)، المطلوب تعيين سرعة كل من النقطتين B و C بدلالة V_A سرعة النقطة A مركز المسنن المخروطي M .

الحل:



(الشكل-5-13)

حتى يتدحرج المخروط M دون انزلاق على سطح المخروط الثابت N ، يجب أن تكون لنقط المخروط المتحرك M الواقعة على المستقيم OB ، نفس سرعات نقط سطح المخروط الثابت N ، لانعدام الحركة النسبية فيهم، بالتالي فإن سرعات هذه النقط تساوي الصفر.

كما نلاحظ أن حركة المخروط M بتدحرجه على سطح المخروط الثابت N هي حركة كروية، حيث الرأس O يبقى ثابتاً، ويكون محور الدوران الآني OP لدوران المخروط M منطبقاً على المستقيم OB ، الذي يمس به المخروط المتحرك المخروط الثابت، لأن سرعة نقاطه معدومة، بالتالي تكون القيمة العددية لمتجه السرعة الزاوية لحركة المخروط، وفق العلاقة (5-33):

$$w = V_A / h_A \ \text{rad/sec}$$

حيث h_A تمثل بعد النقطة A عن المحور الآني للدوران OB .

بالتالي تكون سرعة النقطة C :

$$V_C = \omega . h_C \ \text{m/sec}$$

حيث h_C تمثل بعد النقطة C عن المحور الآني للدوران OB .

وبما أن:

$$h_C = 2\,h_A \qquad \Rightarrow \qquad V_C = 2V_A$$

أما سرعة النقطة B الواقعة على المحور الآني للدوران فتكون معدومة ($V_B = 0$).

مسألة 5-2-

يتحرك جسم صلب حول نقطة ثابتة منه O تؤخذ كمبدأ للإحداثيات، بحيث أن مساقط متجه السرعة الزاوية للجسم على محاور الإحداثيات الثابتة OXYZ ، هي:

$$w_X = 5\sin\frac{p}{2}t \quad , \quad w_Y = 5\cos\frac{p}{2}t \quad , \quad w_Z = 5\sqrt{3}$$

المطلوب في الزمن ($t = 1$ sec) تعيين سرعة النقطة M على الجسم وتسارعها، ذي الإحداثيات على المحاور الاحداثية الثابتة ($x = 0$) و ($y = 0.2$) و ($z = 0.3$).

الحل:

لحساب السرعة الخطية للنقطة M ، يجب أن نحسب مركبات السرعة الزاوية عند الزمن ($t = 1$ sec)، حيث لدينا:

$$w_x = 5\sin\frac{p}{2} = 5 \quad , \quad w_Y = 5\cos\frac{p}{2} = 0 \quad , \quad w_Z = 5\sqrt{3}$$

ومنه القيمة العددية لمتجه السرعة الزاوية للجسم:

$$w = (w_x^2 + w_y^2 + w_z^2)^{1/2} = 10 \ \text{rad/sec}$$

نلاحظ أن متجه السرعة الزاوية ثابت بطوله متغير باتجاهه فحسب، بالتالي تتعين السرعة الخطية للنقطة M بدلالة مساقطها، حسب علاقات أولر:

$$V_X = w_Y.z - w_Z.y = -0.2\times 5\sqrt{3} = -\sqrt{3}\ \text{m/sec}$$
$$V_Y = w_Z.x - w_X.z = -5\times 0.3 = -1.5\ \text{m/sec}$$
$$V_Z = w_X.y - w_y.x = 5\times 0.2 = 1\ \text{m/sec}$$

ومنه القيمة العددية للسرعة الخطية للنقطة M :

$$V = (V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2)^{1/2} = (3 + 2.25 + 1)^{1/2} = 2.5\ \text{m/sec}$$

أما لحساب التسارع الخطي للنقطة، فيجب أن نحسب مركبات التسارع الزاوي عند الزمن ($t = 1$ sec)، حيث لدينا:

$$e_X = \frac{d}{dt} w_X = \frac{5}{2} p.\cos\frac{p}{2} = 0$$
$$e_Y = \frac{d}{dt} w_Y = -\frac{5}{2} p.\sin\frac{p}{2} = -2.5p\ \text{rad/sec}^2$$
$$e_Z = \frac{d}{dt} w_Z = 0$$

ومنه نلاحظ أن القيمة العددية لمتجه التسارع الزاوي ε في الزمن ($t = 1$ sec) هو ($\varepsilon = 2.5\,\pi$ rad/sec^2)، ويتجه وفق المحور Y في الاتجاه السالب.

بالتالي يتعين التسارع الخطي للنقطة M بدلالة مساقطها على المحاور الثابتة، وتتعين وفق العلاقات:

$$A_x = e_y.z - e_z.y + w_y.V_z - w_z.V_y = -0.3\times 2.5p + 1.5\times 5\sqrt{3} = 10.64\ \text{m/sec}^2$$
$$A_y = e_z.x - e_x.z + w_z.V_x - w_x.V_z = -5\sqrt{3}\times\sqrt{3} - 5 = -20\ \text{m/sec}^2$$
$$A_z = e_x.y - e_y.x + w_x.V_y - w_y.V_x = -5\times 1.5 = -7.5\ \text{m/sec}^2$$

ومنه القيمة العددية للتسارع الخطي للنقطة M :

$$A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} = 23.86\ \text{m/sec}^2$$

مسألة 3-5-3

صفيحة مستطيلة الشكل OABC طول ضلعها الطويل ($OC = a$)، تدور حول رأسها الثابت O ، حيث يبقى ضلعها الصغير OA ملازماً لمستوٍ ثابت، المطلوب تعيين:

1. الوسطاء التي تحدد موضع الصفيحة بدلالة جملة ثلاثية ثابتة.
2. متجه السرعة الزاوية.
3. متجه التسارع الزاوي.
4. السرعة الخطية والتسارع الخطي للرأس C .

الحل:

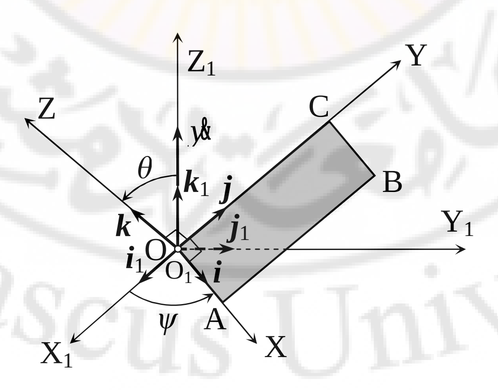
1. نفرض الثلاثية الثابتة $O_1X_1Y_1Z_1$ ، ونأخذ جملة إحداثية OXYZ مقيدة بالصفيحة المستطيلة، بحيث ينطبق مبدؤها O على O_1 ، ومحورها OX ينطبق على الضلع OA ، ومحورها OY ينطبق على الضلع OC ، والمحور OZ يعامد مستوي الصفيحة كما هو مبين في (الشكل-5-14).

بالفرض يبقى المحور OX في المستوي $O_1X_1Y_1$ ، ويحدد موقع المحور O_1X بالزاوية:

$$\psi = (\mathbf{O_1X_1} , \mathbf{O_1X})$$

ويحدد موقع O_1Y باتجاه O_1Z الناظم على سطح الصفيحة، أي بالزاوية:

$$\theta = (\mathbf{O_1Z_1} , \mathbf{O_1Z})$$



(الشكل-5-14)

فإذا كانت الصفيحة في اللحظة t_0 منطبقة على المستوي $O_1X_1Y_1$ ، وأدرناها في مستويها حول O_1Z_1 زاوية ψ ، ثم أدرناها حول ضلعها OA ، أي OX ، زاوية θ حصلنا على وضع الثلاثية $OXYZ$ في اللحظة t ، بالتالي يعين وضع الصفيحة في الفراغ بدلالة الجملة الثابتة $O_1X_1Y_1Z_1$ بالوسيطين ψ و θ .

2. يعين متجه الدوران الآني $\boldsymbol{\Omega}$ بأنه يساوي المجموع الهندسي لمتجهات الدوران:

$$\boldsymbol{\Omega}=\dot{\psi}.\boldsymbol{k_1}+\dot{\theta}.\boldsymbol{i} \qquad (1)$$

ولتعيين مركباته على المحاور الثابتة، نسقط العلاقة على المحور O_1X ، نحصل على:

$$\omega_X=\dot{\psi}.\boldsymbol{k_1}\cdot\boldsymbol{i}+\dot{\theta}.\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}$$

بما أن:

$$\boldsymbol{k_1}\cdot\boldsymbol{i}=0 \quad , \quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1$$

فيكون:

$$\omega_X=\dot{\theta} \qquad (2)$$

وبإسقاط العلاقة (1) على المحور O_1Y ، نحصل على:

$$\omega_Y=\dot{\psi}.\boldsymbol{k_1}\cdot\boldsymbol{j}+\dot{\theta}.\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}$$

بما أن:

$$\boldsymbol{k_1}\cdot\boldsymbol{j}=\sin\theta \quad , \quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0$$

فيكون:

$$\omega_Y=\dot{\psi}.\sin\theta \qquad (3)$$

وبإسقاط العلاقة (1) على المحور O_1Z ، نحصل على:

$$\omega_Z=\dot{\psi}.\boldsymbol{k_1}\cdot\boldsymbol{k}+\dot{\theta}.\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}$$

بما أن:

$$\boldsymbol{k_1}\cdot\boldsymbol{k}=\cos\theta \quad , \quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0$$

فيكون:

$$\omega_Z=\dot{\psi}.\cos\theta \qquad (4)$$

بالتالي نحصل على علاقة متجه السرعة الزاوية بدلالة جملة المحاور المتحركة:

$$\boldsymbol{\Omega}=\dot{\theta}.\boldsymbol{i}+\dot{\psi}.\sin\theta.\boldsymbol{j}+\dot{\psi}.\cos\theta.\boldsymbol{k} \qquad (5)$$

كان بالإمكان الحصول على العلاقة (5) بشكل سريع ومباشر من العلاقة (5-20) بعد التعويض بـــ:

$$\dot{\varphi} = 0 \quad , \quad \cos\varphi = 1 \quad , \quad \sin\varphi = 0$$

نحصل على:

$$\omega_X = \dot{\theta} \quad , \quad \omega_Y = \dot{\psi}.\sin\theta \quad , \quad \omega_Z = \dot{\psi}.\cos\theta$$

كذلك كان بالإمكان الحصول على العلاقة (5) بمجرد التدقيق في (الشكل-5-14)، إذ إن حامل $\dot{\theta}$ هو المحور O_1X ، وحامل $\dot{\psi}$ هو المحور O_1Z_1 ، فيكون:

مسقط $\dot{\theta}$ على المحور O_1X هو $\dot{\theta}$ ، ومسقطها على المحور O_1Y هو الصفر، ومسقطها على المحور O_1Z هو الصفر.

ومسقط $\dot{\psi}$ على المحور O_1X هو الصفر، ومسقطها على المحور O_1Y هو $\dot{\psi}.\sin\theta$ ، ومسقطها على المحور O_1Z هو $\dot{\psi}.\cos\theta$.

بالتالي يكون مسقط $\boldsymbol{\Omega}$ على المحور O_1X هو $\dot{\theta}$ ، ومسقطها على المحور O_1Y هو $\dot{\psi}\sin\theta$ ، ومسقطها على المحور O_1Z هو $\dot{\psi}.\cos\theta$ ، ومنه:

$$\omega_X = \dot{\theta} \quad , \quad \omega_Y = \dot{\psi}.\sin\theta \quad , \quad \omega_Z = \dot{\psi}.\cos\theta$$

أما مركبات المتجه $\boldsymbol{\Omega}$ على المحاور الثابتة، فمسقط $\dot{\theta}.\boldsymbol{i}$ على المحور O_1X_1 هو $\dot{\theta}.\cos\psi$ ، ومسقطه على المحور O_1Y_1 هو $\dot{\theta}.\sin\psi$ ، ويكون:

$$\omega_{X_1} = \dot{\theta}.\cos\psi \quad , \quad \omega_{Y_1} = \dot{\theta}.\sin\psi \quad , \quad \omega_{Z_1} = \dot{\psi}$$

بالتالي نحصل على علاقة متجه السرعة الزاوية بدلالة جملة المحاور الثابتة:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}.\cos\psi\,.\boldsymbol{i_1} + \dot{\theta}.\sin\psi\,.\boldsymbol{j_1} + \dot{\psi}.\boldsymbol{k_1} \qquad (6)$$

3. يعين متجه التسارع الزاوي الآني E ، بالعلاقة:

$$E = \frac{\boldsymbol{d\Omega}}{dt} \qquad (7)$$

ولتعيين مركباته على المحاور الثابتة، نشتق العلاقة (6) بدلالة الزمن:

$$E = (\ddot{\theta}.\cos\psi - \dot{\theta}.\dot{\psi}.\sin\psi)\,\boldsymbol{i_1} + (\ddot{\theta}.\sin\psi + \dot{\theta}.\dot{\psi}.\cos\psi)\,\boldsymbol{j_1} + \ddot{\psi}.\boldsymbol{k_1} \qquad (8)$$

ولتعيين مركباته على المحاور المتحركة، نسقط العلاقة على المحور O_1X ، نحصل على:

$$e_X = (\ddot{\theta}.\cos\psi - \dot{\theta}.\dot{\psi}.\sin\psi)\,\boldsymbol{i_1}\cdot\boldsymbol{i} + (\ddot{\theta}.\sin\psi + \dot{\theta}.\dot{\psi}.\cos\psi)\,\boldsymbol{j_1}\cdot\boldsymbol{i} + \ddot{\psi}.\boldsymbol{k_1}\cdot\boldsymbol{i}$$

بما أن:

$$\boldsymbol{i_1}\cdot\boldsymbol{i} = \cos\psi \quad , \quad \boldsymbol{j_1}\cdot\boldsymbol{i} = \sin\psi \quad , \quad \boldsymbol{k_1}\cdot\boldsymbol{i} = 0$$

وعليه:

$$e_X = \ddot{\theta}.\cos^2\psi + \ddot{\theta}.\sin^2\psi = \ddot{\theta} \qquad (9)$$

وبإسقاط العلاقة (8) على المحور O_1Y ، نحصل على:

$$e_Y = (\ddot{\theta}.\cos\psi - \dot{\theta}.\dot{\psi}.\sin\psi)\,\boldsymbol{i_1}\cdot\boldsymbol{j} + (\ddot{\theta}.\sin\psi + \dot{\theta}.\dot{\psi}.\cos\psi)\,\boldsymbol{j_1}\cdot\boldsymbol{j} + \ddot{\psi}.\boldsymbol{k_1}\cdot\boldsymbol{j}$$

بما أن:

$$\boldsymbol{i_1}\cdot\boldsymbol{j} = -\sin\psi.\cos\theta \quad , \quad \boldsymbol{j_1}\cdot\boldsymbol{j} = \cos\psi.\cos\theta \quad , \quad \boldsymbol{k_1}\cdot\boldsymbol{j} = \sin\theta$$

وعليه:

$$e_Y = \dot{\theta}.\dot{\psi}.\cos\theta + \ddot{\psi}.\sin\theta \qquad (10)$$

وبإسقاط العلاقة (8) على المحور O_1Y ، نحصل على:

$$e_Z = (\ddot{\theta}.\cos\psi - \dot{\theta}.\dot{\psi}.\sin\psi)\,\boldsymbol{i_1}\cdot\boldsymbol{k} + (\ddot{\theta}.\sin\psi + \dot{\theta}.\dot{\psi}.\cos\psi)\,\boldsymbol{j_1}\cdot\boldsymbol{k} + \ddot{\psi}.\boldsymbol{k_1}\cdot\boldsymbol{k}$$

بما أن:

$$\boldsymbol{i_1}\cdot\boldsymbol{k} = \sin\psi.\sin\theta \quad , \quad \boldsymbol{j_1}\cdot\boldsymbol{k} = -\cos\psi.\sin\theta \quad , \quad \boldsymbol{k_1}\cdot\boldsymbol{k} = \cos\theta$$

وعليه:

$$e_Z = \ddot{\psi}.\cos\theta - \dot{\theta}.\dot{\psi}.\sin\theta \qquad (11)$$

وعليه يتعين متجه التسارع الزاوي الآني E بدلالة الجملة المتحركة:

$$E = \ddot{\theta}.\boldsymbol{i} + (\dot{\theta}.\dot{\psi}.\cos\theta + \ddot{\psi}.\sin\theta)\,\boldsymbol{j} + (\ddot{\psi}.\cos\theta - \dot{\theta}.\dot{\psi}.\sin\theta)\,\boldsymbol{k} \qquad (12)$$

4. يعين متجه السرعة الخطية للرأس C ، من العلاقة:

$$\boldsymbol{V_C} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{O_1C} \qquad (13)$$

ولتعيينه بدلالة جملة المحاور المتحركة T ، لدينا من العلاقة (5):

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}.\boldsymbol{i} + \dot{\psi}.\sin\theta.\boldsymbol{j} + \dot{\psi}.\cos\theta.\boldsymbol{k}$$

ومن المعطيات:

$$\mathbf{O_1C} = a.\boldsymbol{j} \qquad (14)$$

بالتعويض:

$$\boldsymbol{V_C} = (\dot{\theta}.\boldsymbol{i} + \dot{\psi}.\sin\theta.\boldsymbol{j} + \dot{\psi}.\cos\theta.\boldsymbol{k}) \wedge a.\boldsymbol{j}$$

وبما أن:

$$\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \quad , \quad \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{j} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}$$

وعليه:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{C}} = a.\dot{\theta}.\boldsymbol{k} - a.\dot{\psi}.\cos\theta.\boldsymbol{i} \qquad (15)$$

وقيمته العددية:

$$V_{\mathrm{C}} = a(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2.\cos^2\theta)^{1/2} \qquad (16)$$

ولتعيينه بدلالة جملة المحاور الثابتة T_1 ، لدينا من العلاقة (6):

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}.\cos\psi.\boldsymbol{i_1} + \dot{\theta}.\sin\psi.\boldsymbol{j_1} + \dot{\psi}.\boldsymbol{k_1}$$

ومن المعطيات:

$$\mathbf{O_1C} = a.\boldsymbol{j}$$

بما أن:

$$\boldsymbol{j}.\boldsymbol{i_1} = -\sin\psi.\cos\theta \quad , \quad \boldsymbol{j}.\boldsymbol{j_1} = \cos\psi.\cos\theta \quad , \quad \boldsymbol{j}.\boldsymbol{k_1} = \sin\theta$$

فيكون:

$$\mathbf{O_1C} = -(a.\sin\psi.\cos\theta)\boldsymbol{i_1} + (a.\cos\psi.\cos\theta)\boldsymbol{j_1} + (a\sin\theta)\boldsymbol{k_1}$$

بالتعويض نحصل على:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{C}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i_1} & \boldsymbol{j_1} & \boldsymbol{k_1} \\ \dot{\theta}.\cos\psi & \dot{\theta}.\sin\psi & \dot{\psi} \\ -a.\sin\psi.\cos\theta & a.\cos\psi.\cos\theta & a\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}_{\mathbf{C}} = \; & a(\sin\psi.\sin\theta.\dot{\theta} - \cos\psi.\cos\theta.\dot{\psi})\boldsymbol{i_1} \\ & + a(\sin\psi.\cos\theta.\dot{\psi} - \cos\psi.\sin\theta.\dot{\theta})\boldsymbol{j_1} + a(\cos\theta.\dot{\theta})\boldsymbol{k_1} \end{aligned} \qquad (17)$$

5. يعين متجه التسارع الخطي للرأس C ، من العلاقة (5-40):

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{C}} = \boldsymbol{E} \wedge \mathbf{O_1C} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{V}_{\mathbf{C}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{1C}} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{2C}} \qquad (18)$$

وتتعين مركباته بدلالة جملة المحاور المتحركة T كما يلي:

فمن العلاقتين (12) و(14) تتحدد المركبة الأولى:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{1C}} = \boldsymbol{E} \wedge \mathbf{O_1C} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \ddot{\theta} & \dot{\theta}.\dot{\psi}.\cos\theta + \ddot{\psi}.\sin\theta & \ddot{\psi}.\cos\theta - \dot{\theta}.\dot{\psi}.\sin\theta \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{1\mathrm{C}} = a(\dot{\theta}.\dot{\psi}.\sin\theta - \ddot{\psi}.\cos\theta)\,\boldsymbol{i} + a.\ddot{\theta}.\boldsymbol{k} \qquad (19)$$

ومن العلاقتين (5) و(15) تتحدد المركبة الثانية:

$$\boldsymbol{A}_{2\mathrm{C}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{V}_{\mathrm{C}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dot{\theta} & \dot{\psi}.\sin\theta & \dot{\psi}.\cos\theta \\ -a.\dot{\psi}.\cos\theta & 0 & a\dot{\theta} \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{2\mathrm{C}} = a(\dot{\theta}.\dot{\psi}.\sin\theta)\,\boldsymbol{i} - a(\dot{\psi}^2.\cos^2\theta + \dot{\theta}^2)\,\boldsymbol{j} + a(\dot{\psi}^2.\sin\theta.\cos\theta)\boldsymbol{k} \qquad (20)$$

وبجمع العلاقتين (19) و (20) ينتج:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{\mathrm{C}} = {} & a(2\dot{\theta}.\dot{\psi}.\sin\theta - \ddot{\psi}.\cos\theta)\,\boldsymbol{i} - a(\dot{\psi}^2.\cos\theta + \dot{\theta}^2)\,\boldsymbol{j} \\ & + a(\dot{\psi}^2.\sin\theta.\cos\theta + \ddot{\theta})k \end{aligned} \qquad (21)$$

ولإيجاد مركبات $\boldsymbol{A}_{\mathrm{C}}$ على المحاور الثابتة T_1 ، إما أن نشتق العلاقة (17) بدلالة الزمن، أو أن نسقط العلاقة (21) على محاور الجملة الثابتة.

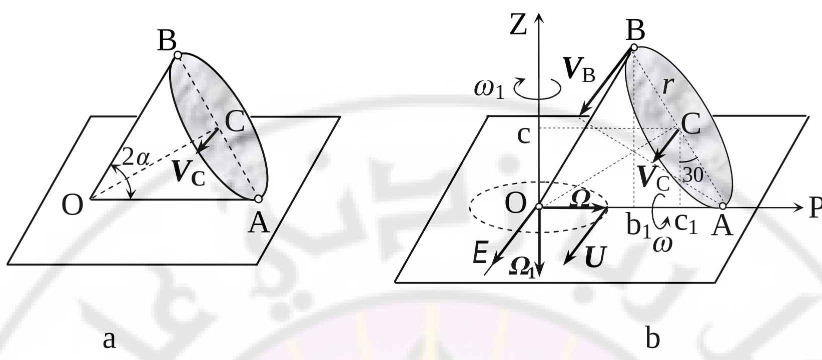
مسألة -5-4

يتدحرج مخروط قطر قاعدته ($AB = 2r = 40 \ \mathrm{cm}$)، وزاويته الرأسية ($2\alpha = 60^{\mathrm{o}}$)، على مستو أفقي ثابت كما هو مبين في (الشكل-5-15a)، فإذا كانت سرعة مركز قاعدة المخروط ($V_{\mathrm{C}} = 60 \ \mathrm{cm/sec}$)، المطلوب بإهمال الانزلاق تعيين ما يلي:

1. متجه السرعة الزاوية لحركة المخروط.
2. متجه التسارع الزاوي لحركة المخروط.
3. السرعة الخطية لأخفض نقطة A ، وأعلى نقطة B من القاعدة.
4. التسارع الخطي للنقطتين A و B .

الحل:

1. حتى يتدحرج المخروط M على المستوي الأفقي الثابت، يجب أن يكون لنقاط المخروط المتحرك الواقعة على المستقيم OP ، نفس سرعات نقط السطح المستوي الأفقي الثابت، لانعدام الحركة النسبية فيهم، بالتالي تكون سرعات نقاط المخروط هذه معدومة.



(الشكل-5-15)

ولتعيين متجه السرعة الزاوية **Ω** لحركة المخروط، نلاحظ أن حركته في أثناء تدحرجه على المستوي الأفقي الثابت هي حركة كروية، حيث الرأس O يبقى ثابتاً، ويكون محور الدوران الآني OP لدوران المخروط منطبقاً على المولد OA الذي يمس به المخروط المستوي الثابت، لأن سرعة نقاطه معدومة كما هو مبين في (الشكل-5-15b)، بالتالي تكون القيمة العددية لمتجه السرعة الزاوية لحركة المخروط، وفق العلاقة (5-33):

$$w = V_C / h_1 = V_C / Cc_1$$

حيث:

$$Cc_1 = r.\cos 30^o = 10\sqrt{3} \text{ cm}$$

بالتعويض:

$$w = 60/10\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ rad/sec}$$

ويكون اتجاهه باتجاه دوران السرعة الخطية $\boldsymbol{V_C}$ حول OP ، كما هو مبين في (الشكل-5-14b).

2. لتعيين متجه التسارع الزاوي *E* لحركة المخروط، نلاحظ أنه عند دوران المخروط حول O يدور المتجه **Ω** حول O في المستوي الأفقي، وترسم نهايته الدائرة الموضحة في (الشكل-5-15b)، وبما أن متجه التسارع الزاوي *E* يساوي هندسياً المتجه **U** سرعة نهاية المتجه **Ω** ، في هذه الحالة فإن **U** تمثل سرعة محيطية حول OZ بسرعة زاوية $\boldsymbol{\Omega_1}$ تحدد قيمتها العددية مثل تحديد السرعة الزاوية لدوران OC حول OP :

$$w_1 = V_C / Cc$$

حيث:

$$\mathrm{Cc} = \mathrm{OC}.\cos 30^o = \mathrm{OA}.\cos 30^o.\cos 30^o = \mathrm{AB}(\cos 30^o)^2 = 30 \text{ cm}$$

بالتعويض:

$$w_1 = 60/30 = 2 \text{ rad/sec}$$

ويكون اتجاهه باتجاه دوران السرعة الخطية $\boldsymbol{V}_{\mathbf{C}}$ حول OZ ، كما هو مبين في (الشكل-5-15b).

منه نحصل على متجه التسارع الزاوي المبين في (الشكل-5-15b):

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{U} = \boldsymbol{\Omega}_1 \wedge \boldsymbol{\Omega}$$

وقيمته العددية:

$$e = U = w.w_1 = 2\,(2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} = 6.93 \text{ rad/sec}^2$$

3. إن السرعة الخطية لأخفض نقطة A من القاعدة معدومة ($V_A = 0$)، لأنها تقع على محور الدوران الآني OP .

أما السرعة الخطية لأعلى نقطة B من القاعدة فتعين كسرعة دورانية حول محور الدوران الآني OP :

$$V_B = \mathrm{Bb}_1.w = 2\mathrm{Cc}_1.w = (20\sqrt{3})(2\sqrt{3}) = 120 \text{ cm/sec}$$

أو كسرعة دورانية حول المركز الآني A:

$$(V_B / \mathrm{AB}) = (V_C / \mathrm{AC}) = w \quad \Rightarrow \quad V_B = 2V_C = 2 \times 60 = 120 \text{ cm/sec}$$

ويكون اتجاهها باتجاه دوران السرعة الزاوية w حول OP ، كما هو مبين في (الشكل-5-15b).

4. يعين التسارع الخطي لأعلى نقطة B من القاعدة وفق العلاقة (5-41):

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{B}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{1B}} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{2B}}$$

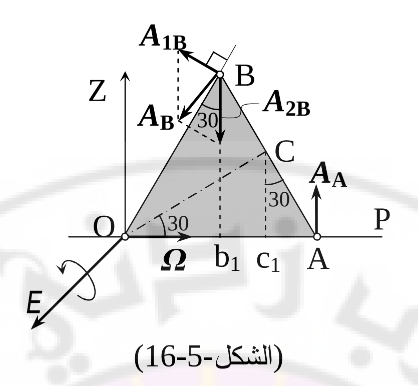
حيث المركبة المحورية لتسارع B تعطى من العلاقة (5-44) بـــ:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{2B}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{V}_{\mathbf{B}}$$

وقيمتها العددية وفق العلاقة (5-45) تساوي:

$$A_{2B} = w.V_B.\sin 90^o = w^2.\mathrm{Bb}_2 = w^2.h_2 = (2\sqrt{3})^2 \times 20\sqrt{3} = 416 \text{ cm/sec}^2$$

وتتجه وفق Bb_1 نحو المحور الآني OP ، كما هو مبين في (الشكل-5-16).



(الشكل-5-16)

والمركبة الدورانية لتسارع B تعطى من العلاقة (5-42) بـــ:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{1B}} = \boldsymbol{E} \wedge \mathbf{OB}$$

وقيمتها العددية وفق العلاقة (5-43) تساوي:

$$A_{1\mathrm{B}} = e.\mathrm{OB}.\sin 90^{\circ} = e.\mathrm{AB}.\sin 90^{\circ} = (4\sqrt{3}) \times 40 = 160\sqrt{3}\ \mathrm{cm/sec^2}$$

وتتجه عمودياً على OB ، وتقع في المستوي ZOP العمودي على E حيث يدور حوله باتجاه دوران ε ، أي باتجاه حركة اليد اليمنى، كما هو مبين في (الشكل-5-16).

وتكون القيمة العددية لتسارع B وفق العلاقة (5-46):

$$A_{\mathrm{B}} = [A_{1\mathrm{B}}^2 + A_{2B}^2 + 2A_{1\mathrm{B}}.A_{2\mathrm{B}}.\cos 120^{\circ}]^{1/2}$$

بالتعويض:

$$A_{\mathrm{B}} = [(160\sqrt{3})^2 + (240\sqrt{3})^2 + 2(160\sqrt{3})(240\sqrt{3})(-0.5)]^{1/2}$$

$$= 80\sqrt{21} \approx 366\,\mathrm{cm/sec^2}$$

أما التسارع الخطي لأخفض نقطة A من القاعدة وفق العلاقة (5-41):

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{A}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{1A}} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{2A}}$$

حيث المركبة المحورية لتسارع A تعطى وفق العلاقة (5-44) بـــ:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{2A}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{V}_{\mathbf{A}}$$

وقيمتها العددية معدومة لانعدام السرعة الخطية للجسيم A ($V_{\mathrm{A}} = 0$).

والمركبة الدورانية لتسارع A تعطى وفق العلاقة (5-42) بـــ:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{1A}} = \boldsymbol{E} \wedge \mathbf{OA}$$

وقيمتها العددية تساوي:

$$A_{1\mathrm{A}} = e.\mathrm{OA}.\sin 90^{\circ} = e.\mathrm{AB}.\sin 90^{\circ} = (4\sqrt{3}) \times 40 = 160\sqrt{3}\ \mathrm{cm/sec^2}$$

ونتجه عمودياً على OA ، وتقع في المستوي ZOP العمودي على E حيث يدور حوله باتجاه دوران ε ، أي باتجاه حركة اليد اليمنى، كما هو مبين في (الشكل-5-16).
وتكون القيمة العددية لتسارع A تساوي:

$$A_A = A_{1A} = 160\sqrt{3} = 277.1\,\text{cm/sec}^2$$

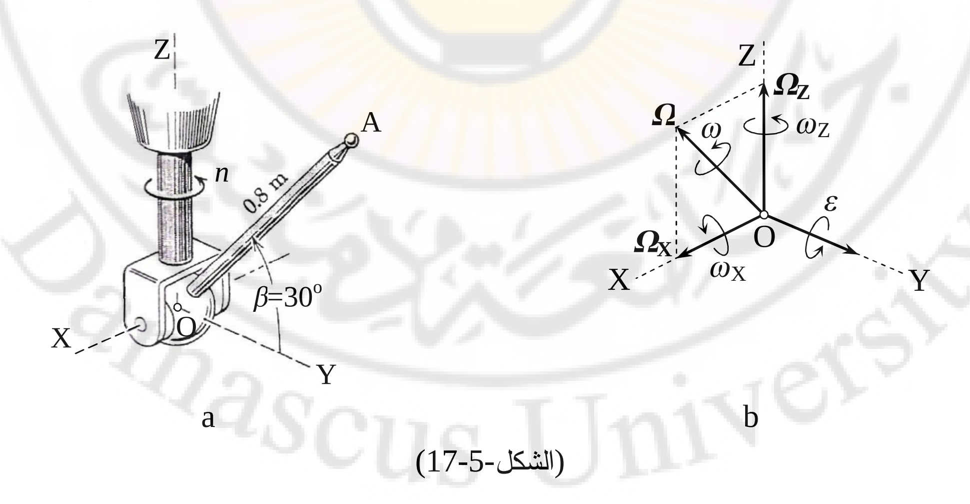
مسألة 5-5-

يستخدم الذراع OA ، وطوله 0.8 m ، لآلية تحكم عن بعد، وهو مثبت في مفصل حول المحور الأفقي X للرأس المفصلي. تدور المجموعة كلها حول المحور Z بسرعة ثابتة (n = 60 r.p.m)، كما يرفع الذراع في الوقت نفسه إلى الأعلى بمعدل ثابت . ($\dot{\vartheta} = 4\,\text{rad/sec}$)

المطلوب في الوضع المبين في (الشكل-5-17a)، الذي تكون فيه ($\beta = 30^o$)، إيجاد ما يلي:

1. السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للذراع OA .
2. السرعة الخطية والتسارع الخطي للطرف A .

الحل:



(الشكل-5-17)

1. لتعيين السرعة الزاوية الكلية للذراع OA ، نلاحظ أنه يدور حول المحور X بسرعة زاوية كما هو مبين في (الشكل-5-17b):

$$\boldsymbol{\Omega}_X = w_X.\boldsymbol{i} = \dot{\vartheta}.\boldsymbol{i} = 4\boldsymbol{i}\ \text{rad/sec}$$

وحول المحور Z بسرعة زاوية:

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{Z}} = \omega_Z.\boldsymbol{k} = \frac{2\pi.\boldsymbol{n}}{60}.\boldsymbol{k} = 6.283\boldsymbol{k}\ \mathrm{rad/sec}$$

بالتالي متجه السرعة الزاوية الكلية للذراع OA هو المجموع الهندسي لمتجهات الدوران:

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{X}} + \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{Z}} = (4\boldsymbol{i} + 6.283\boldsymbol{k})\ \mathrm{rad/sec}$$

ولتعيين التسارع الزاوي للذراع OA ، نلاحظ أنه يدور حول المحور Z بسرعة زاوية ω_{Z} ثابتة لا تتغير في المقدار ولا في الاتجاه، بالتالي فإن:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{Z}} = \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathrm{Z}} = 0$$

ويدور حول المحور X بسرعة زاوية ω_{X} تتغير في الاتجاه، بالتالي فإن مشتقها وفق المعادلة (5-22) هو:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{X}} = \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathrm{X}} = \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{Z}} \wedge \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{X}} = 6.283\,\boldsymbol{k} \wedge 4\,\boldsymbol{i} = 25.13\,\boldsymbol{j}\ \mathrm{rad/sec^2}$$

بالتالي متجه التسارع الزاوي للذراع OA هو المجموع الهندسي لمتجهات التسارع الزاوي:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{X}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{Z}} = 25.13\,\boldsymbol{j} + 0 = 25.13\,\boldsymbol{j}\ \mathrm{rad/sec^2}$$

2. لتعيين السرعة الخطية لنهاية الذراع A ، نلاحظ أن المتجه الموضعي له محدد بـــ:

$$\mathbf{OA} = \boldsymbol{r} = \mathrm{OA}.\cos\beta.\boldsymbol{j} + \mathrm{OA}.\sin\beta.\boldsymbol{k} = (0.693\,\boldsymbol{j} + 0.4\,\boldsymbol{k})\ \mathrm{m}$$

ومنه سرعة A وفق المعادلة (5-32) هو:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OA} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & 0 & 6.283 \\ 0 & 0.693 & 0.4 \end{vmatrix} = (-4.35\,\boldsymbol{i} - 1.60\,\boldsymbol{j} + 2.77\,\boldsymbol{k})\ \mathrm{m/sec}$$

ولتعيين التسارع الخطي لنهاية الذراع A ، فمن المعادلة (5-40):

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\varepsilon} \wedge \mathbf{OA} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{V}_{\mathbf{A}}$$

نحصل على:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 25.13 & 0 \\ 0 & 0.693 & 0.4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & 0 & 6.283 \\ -4.35 & -1.60 & 2.77 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{A}} = (10.05\,\boldsymbol{i}) + (10.05\,\boldsymbol{i} - 38.44\,\boldsymbol{j} - 6.40\,\boldsymbol{k})$$

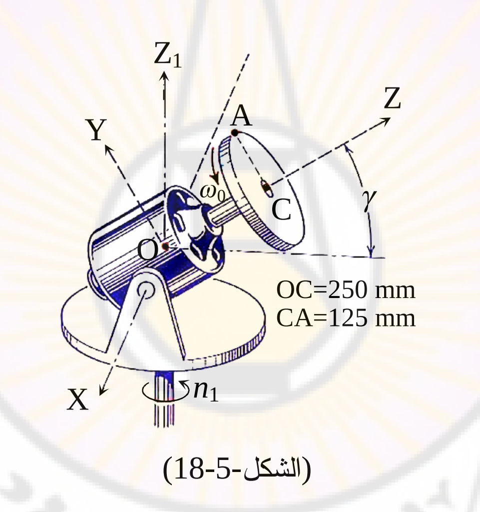
$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{A}} = (20.10\,\boldsymbol{i} - 38.44\,\boldsymbol{j} - 6.40\,\boldsymbol{k})\ \mathrm{m/sec^2}$$

مسألة -5-6

يربط محرك كهربائي بقرص يدور بسرعة زاوية ثابتة منخفضة ($n_0 = 120$ r.p.m)، في الاتجاه المبين في (الشكل-5-18)، أما غلافه وقاعدة تثبيته فهما في حالة سكون في البداية، فإذا دارت المجموعة حول المحور الرأسي Z_1 بمعدل ثابت ($n_1 = 60$ r.p.m) بزاوية ثابتة ($\gamma = 30^o$) ، المطلوب إيجاد ما يلي:

1. السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للقرص.
2. مخروط الجسم ومخروط الفراغ.
3. السرعة الخطية والتسارع الخطي للنقطة A في أعلى القرص في اللحظة الموضحة.

الحل:



(الشكل-5-18)

1. بفرض جملة المحاور OXYZ مرتبطة بهيكل المحرك حيث يكون المحور Z في اتجاه عمود المحرك، والمحور X في اتجاه المحور الأفقي المار من خلال O ، الذي يدور المحرك حوله، والمحور Z_1 رأسي وفي اتجاه المتجه الواحدي:

$$\boldsymbol{k}_1 = \cos g\,.\boldsymbol{j} + \sin g\,.\boldsymbol{k}$$

نلاحظ أن للسرعة الزاوية للمحرك والقرص مركبتين، مركبة حول المحور Z :

$$w_0 = 2p\ n_0 / 60 = 2p \times 120 / 60 = 4\pi \text{ rad/sec}$$

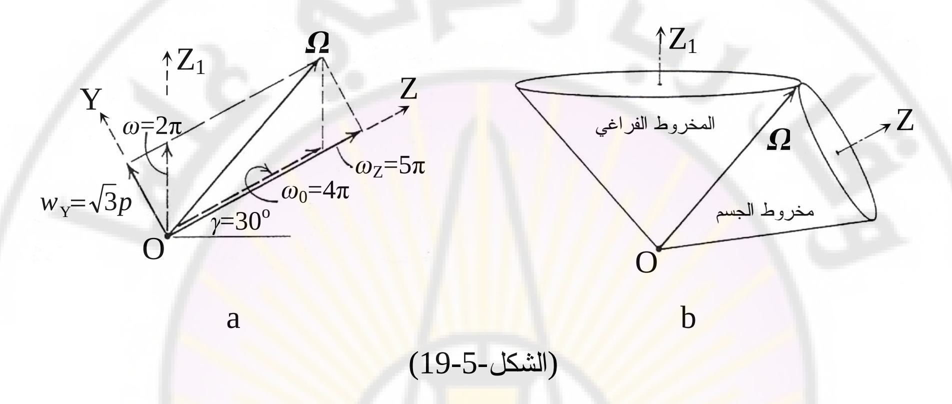
ومركبة حول المحور Z_1 :

$$w_1 = 2p\ n_1 / 60 = 2p \times 60 / 60 = 2p \text{ rad/sec}$$

وبذلك تصبح السرعة الزاوية:

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega_0} + \boldsymbol{\Omega_1} = w_0.\boldsymbol{k} + w_1.\boldsymbol{k_1}$$
$$= w_0.\boldsymbol{k} + w_1(\cos g\,.\boldsymbol{j} + \sin g\,.\boldsymbol{k}) = w_1.\cos g\,.\boldsymbol{j} + (w_0 + w_1.\sin g\,)\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{\Omega} = (2p\,.\cos 30^{o})\,\boldsymbol{j} + (4p\; + 2p\,.\sin 30^{o})\boldsymbol{k} = p\,(\sqrt{3}\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k})\ \text{rad/sec}$$

ومركباتها موضحة في (الشكل-5-19a).



(الشكل-5-19)

ويتعين متجه التسارع الزاوي للمحرك والقرص من العلاقة (5-22):

$$E = \frac{d}{dt}\boldsymbol{\Omega} = w_1.\boldsymbol{k_1} \wedge w\;\; .\boldsymbol{k}$$
$$= w_1(\cos g\,.\boldsymbol{j} + \sin g\,.\boldsymbol{k}) \wedge [(w_1.\cos g\,)\,\boldsymbol{j} + (w_0 + w_1.\sin g\,)\boldsymbol{k}]$$
$$= w_1(w_0.\cos g\; + w_1.\sin g\,.\cos g\,)\boldsymbol{i} - (w_1^2.\sin g\,.\cos g\,)\boldsymbol{i}$$
$$E = (w_1.w_0.\cos g\,)\boldsymbol{i} = (2p \times 4p \times \cos 30^{o})\boldsymbol{i} = 68.4\,\boldsymbol{i}\ \text{rad/sec}^2$$

2. يتعين مخروط الجسم ومخروط الفراغ بمتجه السرعة الزاوية $\boldsymbol{\Omega}$ الذي هو العنصر المشترك لمخروطي الجسم والفراغ الذي يمكن رسمه كما هو مبين في (الشكل-5-19b).

3. لتعيين السرعة الخطية للنقطة A نعين المتجه الموضعي لها في اللحظة الموضحة:

$$\boldsymbol{r} = (0.125\,\boldsymbol{j} + 0.250\boldsymbol{k})\ \text{m}$$

وتكون سرعة النقطة A وفق العلاقة (5-34)، وهي:

$$V_A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \sqrt{3}p & 5p \\ 0 & 0.125 & 0.250 \end{vmatrix} = -0.192p\ \boldsymbol{i}\ \ \text{m/sec}$$

وتسارع النقطة A يحدد وفق العلاقة (5-40)، وهو:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{M}} = E \wedge \mathbf{O_1M} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{V}_{\mathbf{M}}$$

بالتعويض نحصل على:

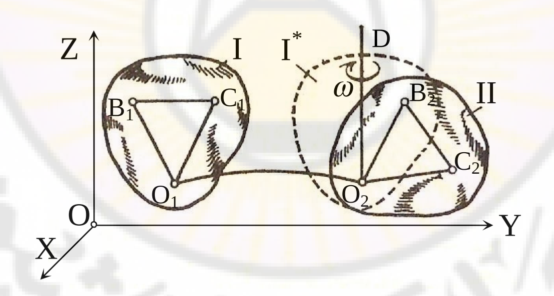
$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{M}} = 68.4\,\boldsymbol{i} \wedge (0.125\,\boldsymbol{j} + 0.250\,\boldsymbol{k}) + p\,(\sqrt{3}\,\boldsymbol{j} + 5\,\boldsymbol{k}) \wedge (-0.192p\,\boldsymbol{i})$$
$$= -26.57\,\boldsymbol{j} + 11.83\,\boldsymbol{k} \quad \mathrm{m/sec^2}$$

10- الحالة العامة لحركة الجسم الصلب الحر

Independent Rigid Body Motion

الحالة العامة لحركة الجسم الصلب الحر أو الطليق هي تلك الحركة التي يتحرك فيها الجسم الصلب كيفما شاء في الفراغ، ويتحرك مثل هذه الحركة حركة أي جسم يتحرك حركة غير انسحابية في الهواء، كحجر مقذوف، أو طائرة تقوم باستعراضات دورانية في الجو، أو قذيفة مدفع وهكذا.

ويتحدد موضع الجسم في هذه الحالة بالنسبة لجملة محاور إحداثية ثابتة T(OXYZ) ، بموضع أي ثلاث نقط من نقطه O , B , C ، لا تقع على استقامة واحدة.



(الشكل-5-20)

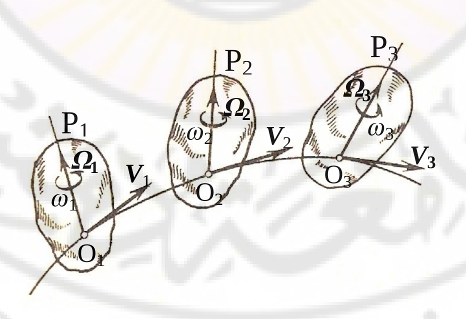
نفرض أن الجسم يوجد عند اللحظة t_1 في الوضع I ، وعند اللحظة t_2 ينتقل إلى الموضع II كما هو مبين في (الشكل-5-20)، وحينئذ يمكن أن يحدث انتقال الجسم خلال الفترة الزمنية ($\Delta t = t_2 - t_1$) بالطريقة التالية:

ننقل الجسم أولاً بحركة انسحابية، حيث تنتقل النقطة الاختيارية O_1 من الجسم الذي يمثل القطب إلى موضع جديد O_2 ، وعندئذ يتخذ الجسم كله الموضع I^* ، والآن لكي ننقل الجسم الى الموضع II ، لابد من إدارته حول القطب O_2 ، كما لو كانت O_2 نقطة ثابتة. يمكن إجراء ذلك استناداً لنظرية أويلر التي سبق إثباتها بانتقال دوراني واحد فحسب للجسم حول محور ما O_2D ، وهكذا يتحقق انتقال الجسم من الموضع I إلى الموضع II بانتقال انسحابي مع القطب O ، ودوران حول المحور OD المار بالقطب O .

لكن هذا الانتقال لا يعبر خلال فترة زمنية اختيارية Δt عن الصورة الحقيقية لحركة الجسم، ونحصل على الصورة الحقيقية للحركة بتقسيم زمن الحركة إلى فترات أولية، يتخذ المحور OD خلال كل منها وضعاً نهائياً مناسباً OP ، أي وضع المحور الآني للدوران.

بالنتيجة تكافئ حركة الجسم الصلب الطليق أو الحر في الحالة العامة في أي لحظة زمنية محصلة حركتين:

- الحركة الأولى وهي انسحابية، حيث تتحرك فيها كل نقط الجسم الصلب بسرعة واحدة وتسارع واحد مساوين لسرعة $\boldsymbol{V_O}$ وتسارع $\boldsymbol{A_O}$ لنقطة ما منه O اختيرت كقطب.
- الحركة الثانية وهي سلسلة دورانات أولية حول المحاور الآنية للدوران المارة بالقطب O بسرعة زاوية $\boldsymbol{\Omega}$ كما هو مبين في (الشكل-5-21).

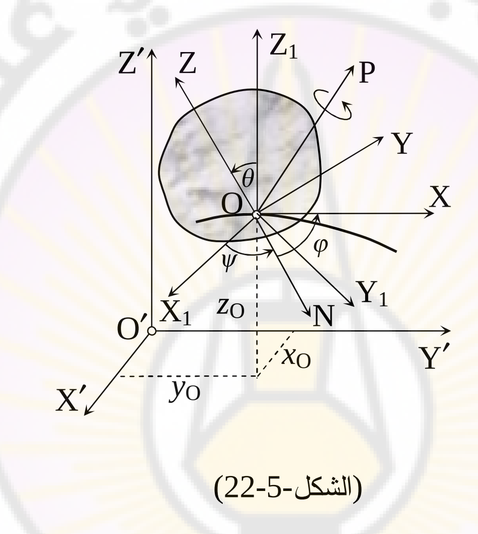


(الشكل-5-21)

كحالة خاصة يمكن أن تكون حركة الجسم الحر حركة مستوية عامة، عندئذ يكون متجه السرعة الزاوية $\boldsymbol{\Omega}$ عمودياً على مستوي الحركة.

11- معادلات حركة الجسم الصلب الحر

لإيجاد معادلات حركة جسم طليق يتحرك بشكل كيفي بالنسبة لجملة محاور إحداثية ثابتة $T'(O'X'Y'Z')$ ، نختار نقطة منه مثل O ونعدها قطباً للحركة، كما نعد جملة المحاور $T_1(OX_1Y_1Z_1)$ الموازية لمحاور الجملة الثابتة T' ، التي تتحرك مع القطب حركة انسحابية، وجملة المحاور $T(OXYZ)$ المقيدة بالجسم الطليق، كما هو مبين في (الشكل-5-22).



(الشكل-5-22)

نلاحظ أن وضعية الجسم الطليق في كل لحظة تتعين بشكل كامل إذا علمت وضعية القطب $O(x_O,y_O,z_O)$ ، ووضعية جملة المحاور المقيدة بالجسم T بالنسبة لجملة المحاور الثابتة T_1 ، أي بمعرفة زوايا أويلر φ , ψ , θ ، بالتالي لتعيين وضع الجسم الطليق في كل لحظة يجب معرفة العلاقات التالية:

$$
\begin{aligned}
x_O = f_1(t) \quad , \quad y_O = f_2(t) \quad , \quad z_O = f_3(t) \\
j = f_4(t) \quad , \quad y = f_5(t) \quad , \quad q = f_6(t)
\end{aligned}
\qquad (49\text{-}5)
$$

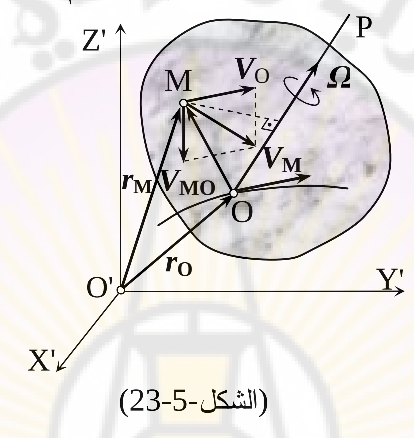
تدعى هذه العلاقات بمعادلات حركة الجسم الطليق، ويتعين الجزء الانتقالي من حركة الجسم الطليق بالمعادلات الثلاث الأولى، وتعين المعادلات الثلاث الباقية الجزء الدوراني حول القطب كجسيم ثابت.

12-.السرعة الخطية لجسيم من الجسم الصلب الحر

لتعيين السرعة الخطية لنقطة ما M من الجسم الطليق المبين في (الشكل-5-23)، نعتبر النقطة O قطباً، على أن سرعته $\boldsymbol{V}_{\mathbf{O}}$ معلومة، ومن ثم نرسم المتجه الموضعي لكل من O و M ، وبالاستناد إلى الشكل يمكن أن نكتب العلاقة:

$$\boldsymbol{r}_{\mathbf{M}} = \boldsymbol{r}_{\mathbf{O}} + \mathbf{OM}$$

حيث المتجه $\mathbf{OM}$ يغير اتجاهه فحسب أثناء حركة الجسم، بينما يبقى طوله ثابتاً.



(الشكل-5-23)

باشتقاق العلاقة تعين سرعة النقطة M :

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_{\mathbf{M}} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_{\mathbf{O}} + \frac{d}{dt}\mathbf{OM}$$

حيث:

$(\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_{\mathbf{O}} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{O}})$ تمثل سرعة القطب O .

$(\frac{d}{dt}\mathbf{OM} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{MO}})$ تمثل سرعة النقطة M في حركتها الكروية حول القطب O ، والتي تعين بالعلاقة (5-32)، أي:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{MO}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM}$$

بالتعويض:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{O}} + \boldsymbol{V}_{\mathbf{MO}} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{O}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM} \qquad (5\text{-}50)$$

أي أن السرعة الخطية لنقطة من الجسم الطليق أو الحر تساوي إلى المجموع الهندسي لمتجه سرعة النقطة التي اختيرت قطباً، ومتجه سرعة النقطة المدروسة في حركتها حول القطب المحسوب كنقطة ثابتة.

13- التسارع الخطي لجسيم من الجسم الصلب الحر

لتعيين التسارع الخطي لنقطة ما M من الجسم الطليق المبين في (الشكل-5-24)، نشتق علاقة السرعة الخطية (5-48) نحصل على:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{M}} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{V}_{\mathbf{O}} + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \frac{d}{dt}\mathbf{OM}$$

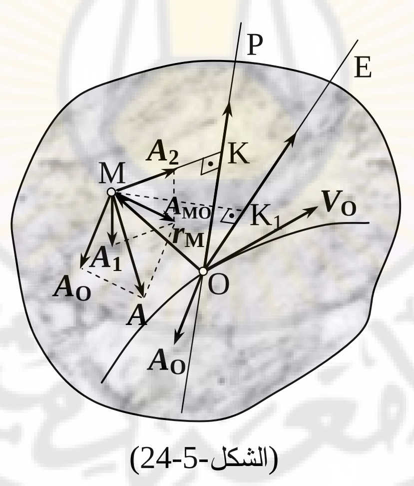
$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{M}} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\boldsymbol{V}_{\mathbf{O}} + \boldsymbol{E} \wedge \mathbf{OM} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{V}_{\mathbf{MO}}$$

حيث:

$(\frac{d}{dt}\boldsymbol{V}_{\mathbf{O}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{O}})$ تمثل تسارع القطب O .

$(\boldsymbol{E} \wedge \mathbf{OM} = \boldsymbol{A}_1)$ تمثل مركبة التسارع الدوراني الناتج عن حركة الجسم حول القطب المعتبر كنقطة ثابتة، المعين وفق العلاقة (5-42).

$(\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{V}_{\mathbf{MO}} = \boldsymbol{A}_2)$ تمثل مركبة التسارع المحوري الناتج عن حركة الجسم حول القطب المحسوب كنقطة ثابتة، المعين وفق العلاقة (5-44).



(الشكل-5-24)

بالتعويض نحصل على:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{M}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{O}} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{1MO}} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{2MO}} \qquad (5\text{-}51)$$

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{M}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{O}} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{MO}} \qquad (5\text{-}52)$$

أي أن التسارع الخطي لنقطة من الجسم الطليق أو الحر تساوي المجموع الهندسي لمتجه تسارع النقطة الذي اختير قطباً، ومتجه تسارع النقطة المدروسة في حركتها حول القطب المحسوب كنقطة ثابتة، ويعين بالإنشاء كما هو مبين في (الشكل-5-24).

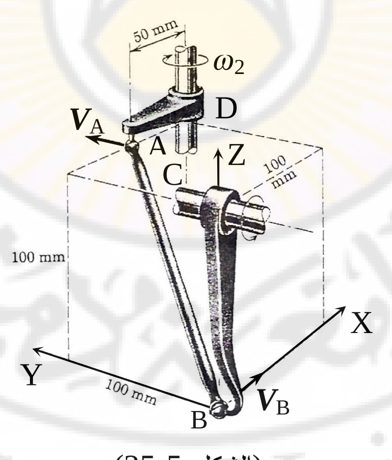
إذا تم اختيار النقطة M كقطب ترتبط به مجموعة الإحداثيات المتحركة، وتمت دراسة حركة الجسم الصلب بالنسبة له، يظهر أن للنقطة O متجه السرعة الزاوية $\boldsymbol{\Omega}$ نفسه، ومتجه التسارع الزاوي E نفسه تماماً، كما في حالة دراسة الحركة بالنسبة للجملة 'T ، إذن فمتجها السرعة الزاوية والتسارع الزاوي مستقلان تماما عن موضع اختيار القطب.

مسألة 7-5-

يدور المرفق CB حول المحور الأفقي بسرعة زاوية ($w_1 = 6$ rad/sec)، وهي ثابتة خلال فترة قصيرة من الحركة تشمل الوضع الموضح في (الشكل-5-25). يربط القضيب AB المرفق AD بالمرفق CB بواسطة مفصل كروي عند كل طرف من أطرافه. المطلوب إيجاد في اللحظة الموضحة، ما يلي:

1. السرعة الزاوية $\boldsymbol{\Omega_2}$ للمرفق DA .
2. السرعة الزاوية $\boldsymbol{\Omega}$ للقضيب AB .
3. التسارع الزاوي E_2 للمرفق DA .
4. التسارع الزاوي E للقضيب AB .

الحل:



(الشكل-5-25)

1. تعين السرعة الزاوية w_2 للمرفق DA باستخدام المعادلة (5-50)، واعتبار المفصل B قطب لمعرفة حركته بسهولة من القيمة المعطاة للسرعة الزاوية w_1 للمرفق CB ، مع الأخذ بالحسبان جملة المحاور BXYZ المرتبطة بالمفصل B :

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{A}} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{B}} + \boldsymbol{V}_{\mathbf{AB}} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{B}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{BA}$$

حيث السرعات:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{A}} = 50\, w_2.\boldsymbol{j} \quad , \quad \boldsymbol{V}_{\mathbf{B}} = 100\, w_1.\boldsymbol{i} = 600\, \boldsymbol{i} \quad \text{mm/sec}$$

و W متجه السرعة الزاوية للقضيب AB وهو عمودي على **AB** .

والمتجه **BA** المحدد بالعلاقة:

$$\mathbf{BA} = \boldsymbol{r}_{\mathbf{AB}} = 50\, \boldsymbol{i} + 100\, \boldsymbol{j} + 100\, \boldsymbol{k} \quad \text{mm}$$

بالتعويض في علاقة السرعة نحصل على:

$$50\, w_2.\boldsymbol{j} = 600\, \boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ w_{\mathrm{X}} & w_{\mathrm{Y}} & w_{\mathrm{Z}} \\ 50 & 100 & 100 \end{vmatrix}$$

ومساواة معاملات حدود ووحدات المتجهات $\boldsymbol{k}$ و $\boldsymbol{j}$ و $\boldsymbol{i}$ ، نحصل على:

$$-6 = \quad + w_{\mathrm{Y}} - w_{\mathrm{Z}}$$

$$w_2 = -2w_{\mathrm{X}} \quad + w_{\mathrm{Z}}$$

$$0 = 2w_{\mathrm{X}} - w_{\mathrm{Y}}$$

بجمع هذه المعادلات نعين السرعة الزاوية w_2 للمرفق DA:

$$w_2 = 6 \ \text{rad/sec}$$

2. وتعين السرعة الزاوية $\boldsymbol{\Omega}$ للقضيب AB على أن $\boldsymbol{\Omega}$ عمودية على $\boldsymbol{V}_{\mathbf{AB}}$ ، ولا يمكن حلها إلا بإدخال الفرض أن $\boldsymbol{\Omega}$ تكون عمودية أيضاً على $\boldsymbol{r}_{\mathbf{AB}}$ ، ولهذا:

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{r}_{\mathrm{AB}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 50 w_{\mathrm{X}} + 100 w_{\mathrm{Y}} + 100 w_{\mathrm{Z}} = 0$$

ويعطي ضم هذه المعادلة إلى معادلتين من المعادلات الثلاث السابقة، مركبات متجه السرعة الزاوية:

$$w_{\mathrm{X}} = -4/3 \,\text{rad/sec} \quad , \quad w_{\mathrm{Y}} = -8/3 \,\text{rad/sec} \quad , \quad w_{\mathrm{Z}} = 10/3 \,\text{rad/sec}$$

ومنه متجه السرعة الزاوية للقضيب AB :

$$\boldsymbol{\Omega} = (2/3)(-2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}) \ \text{rad/sec}$$

وقيمته العددية:

$$w = (2/3)(2^2 + 4^2 + 5^2)^{1/2} = 2\sqrt{5} \ \ \text{rad/sec}$$

3. ويتعين التسارع الزاوي E_2 للمرفق DA بتطبيق المعادلة (5-51) على طرفي القضيب AB :

$$A_A = A_B + A_{1AB} + A_{2AB}$$

$$A_A = A_B + E \wedge r_{AB} + \Omega \wedge V_{AB}$$

حيث يعين تسارع الطرفين A و B بدلالة مركباتها الناظمية والمماسية، وهي:

$$A_A = 50\, w_2^2.i + 50 e_2.\, j = (1800\, i + 50 e_2. j)\ \text{mm/sec}^2$$

$$A_B = 100\, w_1^2.k + 0.\, i = 3600\, k\ \text{mm/sec}^2$$

ويعين أيضاً الجداءات:

$$E \wedge r_{AB} = (100 e_Y - 100 e_Z) i + (50 e_Z - 100 e_X) j + (100 e_X - 50 e_Y) k$$

$$\Omega \wedge V_{AB} = \Omega \wedge (\Omega \wedge r_{AB}) = -w^2.r_{AB} = -20(50\, i + 100\, j + 100\, k)$$

ويعطي التعويض في معادلة التسارع، ومساواة معاملات k و j و i :

$$28 = \quad + e_Y - e_Z$$

$$e_2 + 40 = -2 e_X \quad + e_Z$$

$$-32 = 2 e_X - e_Y$$

بجمع هذه المعادلات نعين التسارع الزاوي ε_2 للمرفق DA:

$$\varepsilon_2 = -36\ \text{rad/sec}^2$$

ويلاحظ أن متجه التسارع الزاوي E للقضيب AB عمودي على r_{AB} ، ولكنه ليس عمودياً على V_{AB} كما هو الحال بالنسبة لمتجه السرعة الزاوية Ω .

$$E \cdot r_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 e_X + 4 e_Y + 4 e_Z = 0$$

ويعطي ضم هذه المعادلة إلى معادلتين من المعادلات الثلاث السابقة أن:

$$e_X = -8\ \text{rad/sec}^2 \quad , \quad w_Y = 16\ \text{rad/sec}^2 \quad , \quad w_Z = -12\ \text{rad/sec}^2$$

ومنه متجه التسارع الزاوي للقضيب AB:

$$E = 4(-2 i + 4 j - 3 k)\ \text{rad/sec}^2$$

وقيمته العددية:

$$|e| = 4(2^2 + 4^2 + 3^2)^{1/2} = 4\sqrt{29}\ \ \text{rad/sec}^2$$

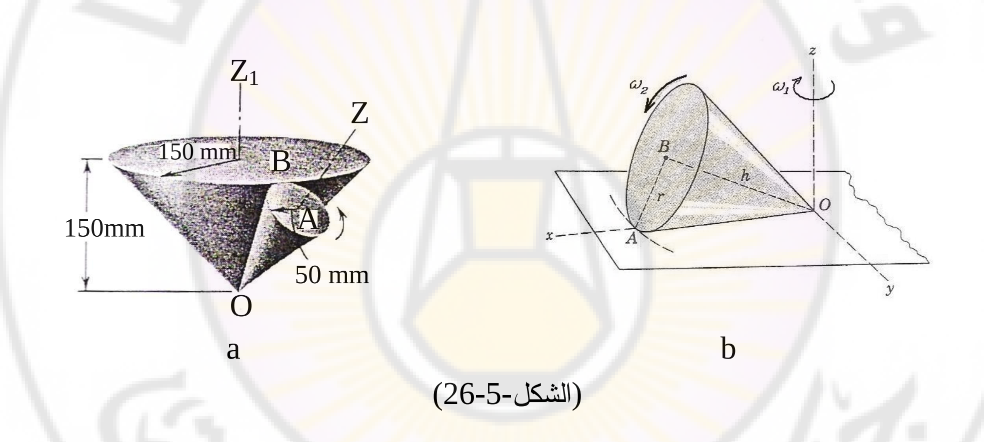
PROBLEMS مسائل غير محلولة

مسألة - 1

يتدحرج المخروط القائم A على المخروط القائم الثابت B بمعدل ثابت كما هو مبين في (الشكل-5-26a)، ويدور دورة واحدة كاملة حول المخروط B كل 4 sec . المطلوب حساب مقدار التسارع الزاوي ε للمخروط A .



الجواب: $\varepsilon = 6.32\ \text{rad/sec}^2$



(الشكل-5-26)

مسألة - 2

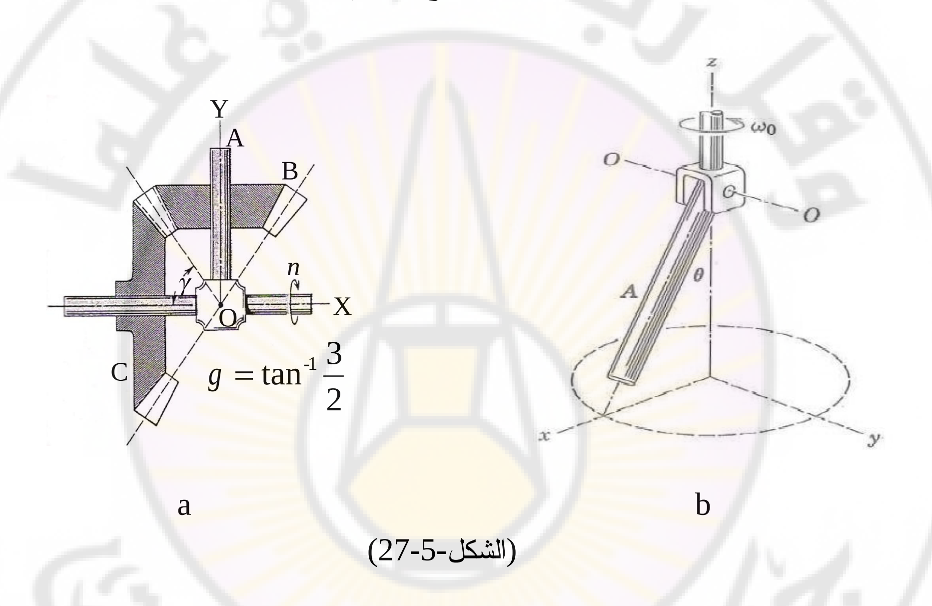
يتدحرج المخروط الصلب القائم (*right-circular cone*) الذي نصف قطر قاعدته r وارتفاعه h على السطح المستوي دون انزلاق، ويتحرك مركز القاعدة الدائرية B في مسار دائري حول المحور Z بسرعة ثابتة V_B كما هو مبين في (الشكل-5-26b). المطلوب إيجاد السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للمخروط الصلب.

تفرض المعطيات التالية: $V_B = 15$ cm/s , $h = 26$ cm , $r = 15$ cm

الجواب: $\omega = 2.31\,\boldsymbol{i}\ \text{rad/sec}$, $\varepsilon = -3.07\,\boldsymbol{j}\ \text{rad/sec}^2$

مسألة - 3

يدور العمود OA للمسنن المخروط B حول المحور الثابت X ، بعدد دورات ثابتة ($n = 60$ r.p.m.) في الاتجاه الموضح في (الشكل-5-27a)، ويتشابك المسنن B مع المسنن المخروط C ، على طول مخروط الخطوة الذي نصف زاوية رأسه هي ($\gamma = \tan^{-1} 3/2$)، فإذا كان المسنن C ثابتاً لا يدور، وأن المحور Y يدور مع العمود OA ، المطلوب إيجاد السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للمسنن B .



(الشكل-5-27)

<u>مسألة - 4</u>

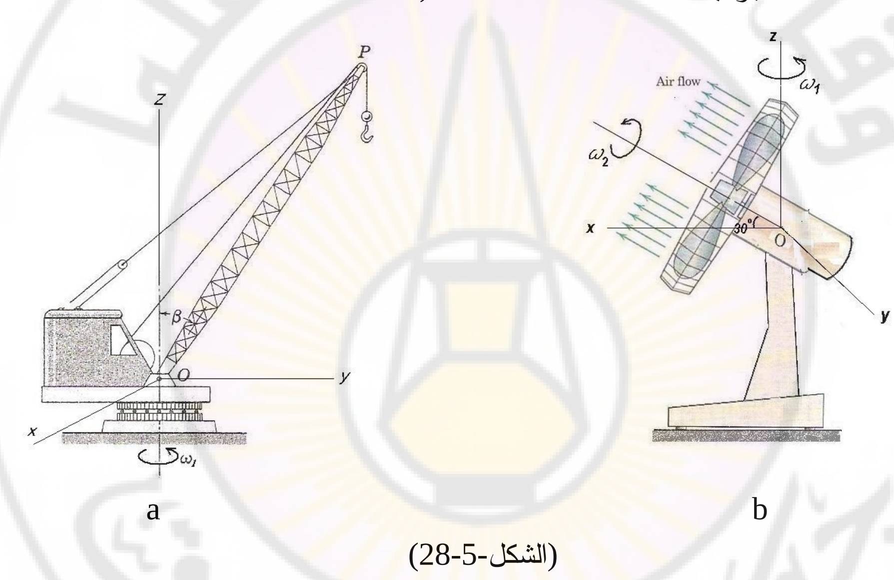
يثبت القضيب A تثبيتاً مفصلياً في مشبك قائم الزاويتين (*Clevis*)، الذي يتصل بدوره بعمود رأسي، حيث يستطيع الدوران حول المحور O كما هو مبين في (الشكل-5-27b)، فإذا دار العمود بسرعة زاوية ثابتة ($\omega_1 = \omega_o$)، وتناقصت الزاوية θ بمعدل ثابت ($\omega_2 = - p$)، المطلوب إيجاد السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للقضيب.

الجواب: $\omega = p\,\boldsymbol{j} + \omega_o\,\boldsymbol{k}$ rad/sec , $\varepsilon = -\,\omega_o\,p\,\boldsymbol{i}$ rad/sec^2

مسألة - 5

رافعة دوارة (*Crane*) تدور حول قاعدة ثابتة كما هو مبين في (الشكل-5-28a).
تدور الرافعة حول المحور الرأسي Z بسرعة ثابتة مقدارها ($n_1 = 2$ r.p.m.) في الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة، وفي الوقت ذاته يتم خفض الذراع بسرعة ثابتة ($\omega_2 = 0.1$ rad/sec) . المطلوب إيجاد سرعة وتسارع نهاية الذراع P في الوضع الذي تكون فيه ($\beta = 30°$)، مع العلم أن طول الذراع (*Boom*) OP يساوي 24 m .

الجواب: $V = 3.48$ m/sec , $A = 1.1$ m/sec^2



(الشكل-5-28)

مسألة - 6

تدور المجموعة المؤلفة من محرك(*Motor*) ومروحة (*Fan*) حول المحور الرأسي Z المار من النقطة الثابتة O بسرعة زاوية مقدارها ($\omega_1 = 0.8$ rad/sec)، وبتسارع زاوي مقداره ($\varepsilon_1 = 12$ rad/sec^2)، وكلاهما بعكس دوران عقارب الساعة ، وتدور في الوقت ذاته شفرات (*Blades*) المروحة بسرعة زاوية ($\omega_2 = 16$ rad/sec)، وبتباطؤ زاوي ($\varepsilon_2 = - 2$ rad/sec^2)، وذلك بالنسبة للمحرك وفي الاتجاه المبين في (الشكل-5-28b).
المطلوب إيجاد السرعة الزاوية والتسارع الزاوي لشفرات المروحة في الوضع الموافق ($\theta = 30°$).

الجواب: $\omega = 13.86\,\boldsymbol{i} + 8.8\,\boldsymbol{k}$ rad/sec , $\varepsilon = - 1.73\,\boldsymbol{i} + 11.09\,\boldsymbol{j} + 11\,\boldsymbol{k}$ rad/sec^2

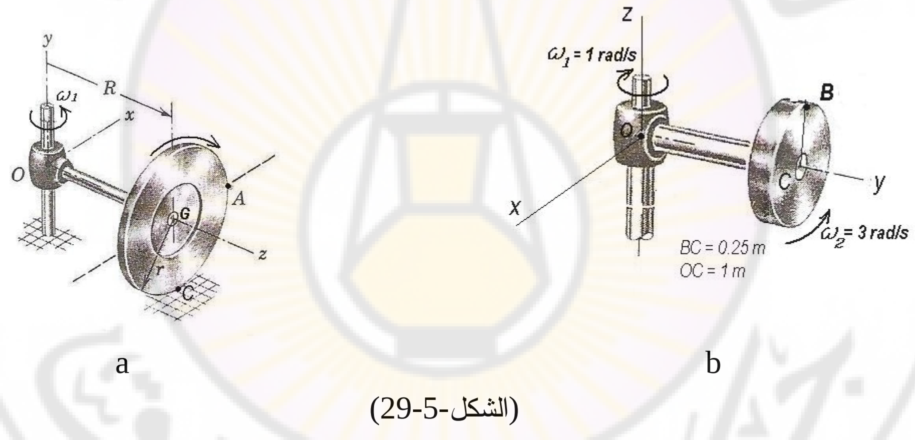
مسألة - 7

عجلة (*Wheel*) نصف قطرها r مثبتة على العمود OG ، والذي بدوره يدور حول النقطة الثابتة O . بفرض أن العجلة نصف قطرها ($r = 20$ cm) تتدحرج على أرض أفقية دون انزلاق في قوس دائري نصف قطره ($R = 60$ cm) ، وأنها تتحرك بسرعة زاوية ثابتة ($\omega_1 = 10$ rad/sec) حول المحور الرأسي Y كما هو مبين في (الشكل-5-29a). المطلوب إيجاد ما يلي:

1. السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للعجلة.
2. سرعة النقطة A التي تقع على الخط الأفقي المار من مركز العجلة وتسارعها.

الجواب: $\omega = 10\,\boldsymbol{j} - 30\,\boldsymbol{k}$ rad/sec , $\boldsymbol{\varepsilon} = -300\,\boldsymbol{i}$ rad/sec^2

$\boldsymbol{V} = 0.6\,\boldsymbol{i} - 0.6\,\boldsymbol{j} - 0.2\,\boldsymbol{k}$ m/s , $A = -20\,\boldsymbol{i} - 0.6\,\boldsymbol{k}$ m/sec^2



(الشكل-5-29)

مسألة - 8

يدور قرص دائري حول محوره الأفقي y المار من النقطة الثابتة O بسرعة زاوية منتظمة تساوي ($\omega_2 = 3$ rad/s)، في الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة، وفي الوقت ذاته تدور المجموعة بأكملها حول المحور الرأسي Z بسرعة زاوية منتظمة تساوي ($\omega_1 = 1$ rad/sec) في اتجاه دوران عقارب الساعة كما هو مبين في (الشكل-5-29b). المطلوب إيجاد ما يلي:

1. السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للقرص.
2. سرعة النقطة B التي تقع على الخط الرأسي المار من مركز القرص وتسارعها.

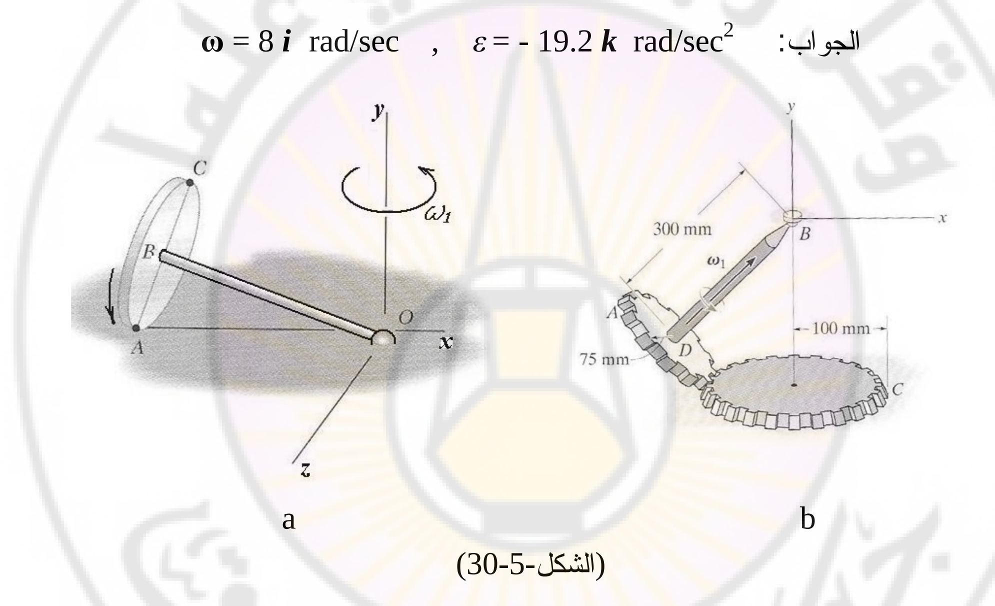
الجواب: $\omega = 3\,\boldsymbol{j} + 1\,\boldsymbol{k}$ rad/sec , $\varepsilon = 3\,i$ rad/sec^2

$V = 1.75\,\boldsymbol{i}$ m/sec , $A = -2.5\,j - 2.25\,\boldsymbol{k}$ m/sec^2

مسألة - 9

عجلة (*Wheel*) نصف قطرها 30 mm مثبتة على العمود OB طوله 100 mm ، الذي يدور حول النقطة الثابتة O . بفرض أن العمود OB عمودي على سطح العجلة، وأن العجلة تتدحرج على أرض أفقية دون انزلاق، وكلاهما يتحركان بسرعة زاوية ثابتة ($\omega_1 = 2.4$ rad/sec) حول المحور الرأسي Y وفق الاتجاه الموضح في (الشكل-5-30a). المطلوب إيجاد السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للعجلة.

الجواب: $\boldsymbol{\omega} = 8\,\boldsymbol{i}$ rad/sec , $\varepsilon = -19.2\,\boldsymbol{k}$ rad/sec^2



a b

(الشكل-5-30)

مسألة - 10

يدور العمود BD والمسنن المخروطي A المثبت في نهايته D حول المفصل الكروي (*Ball-and-Socket joint*) B . حيث إن المسنن A يقع في حالة تعشيق مع المسنن المخروطي الثابت C ، وإن العمود والمسنن A يدوران حول محورهما الهندسي بسرعة زاوية ثابتة تساوي ($\omega_1 = 8$ rad/sec). المطلوب إيجاد السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للمسنن A ، وذلك في اللحظة التي تكون فيها المجموعة في الوضع المبين في (الشكل-5-30b).

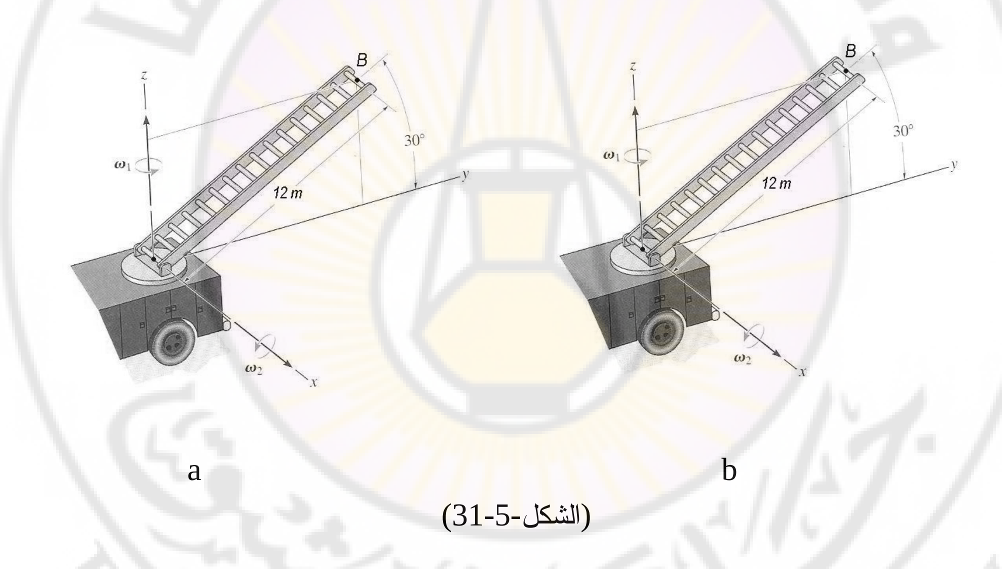
الجواب: $\omega = 4.38\,\boldsymbol{i} + 12.9\,\boldsymbol{j}$ rad/sec , $\varepsilon = -27.38\,\boldsymbol{k}$ rad/sec^2

مسألة - 11

يدور سلم (*Ladder*) سيارة الإطفاء (*Fire truck*) حول المحور الرأسي Z بسرعة زاوية ($\omega_1 = 0.15$ rad/sec) وبتسارع زاوي($\varepsilon_1 = 0.8$ rad/sec^2)، وكلاهما بعكس دوران عقارب الساعة، وفي الوقت ذاته يدور السلم باتجاه الأعلى حول المحور X بسرعة زاوية ثابتة ($\omega_2 = 0.6$ rad/sec). المطلوب إيجاد سرعة النقطة B التي تقع في نهاية السلم وتسارعها وذلك في الوضع المبين في (الشكل-5-31a).

الجواب:

$V = - 1.56\, \boldsymbol{i} - 3.6\, \boldsymbol{j} + 6.24\, \boldsymbol{k}$ m/sec , $A = - 7.23\, \boldsymbol{i} - 3.98\, \boldsymbol{j} - 2.16\, \boldsymbol{k}$ m/sec^2



(الشكل-5-31)

مسألة - 12

يدور سلم سيارة الإطفاء حول المحور الرأسي Z بسرعة زاوية ($\omega_1 = 0.15$ rad/sec)، وبتسارع زاوي ($\varepsilon_1 = 0.2$ rad/sec^2)، وكلاهما بعكس دوران عقارب الساعة، وفي الوقت ذاته يدور السلم باتجاه الأعلى حول المحور X بسرعة زاوية ($\omega_2 = 0.6$ rad/sec^2)، وبتسارع زاوي ($\varepsilon_2 = 0.4$ rad/sec^2). المطلوب إيجاد سرعة النقطة B التي تقع في نهاية السلم وتسارعها في الوضع المبين في (الشكل-5-31b).

الجواب: $V = -1.56\, \boldsymbol{i} - 3.6\, \boldsymbol{j} + 6.24\, \boldsymbol{k}$ m/s , $A = - 1\, \boldsymbol{i} - 6.39\, \boldsymbol{j} + 2\, \boldsymbol{k}$ m/sec^2

الفصل السادس

الحركة المركبة لجسيم مادي *Resultant Motion of a Particle*

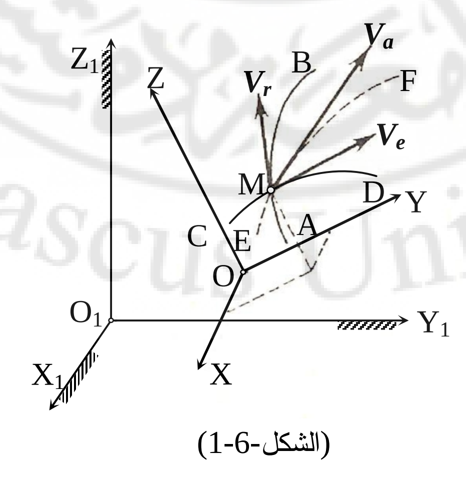
1- تعريف الحركة المركبة

في الفصول السابقة ناقشنا حركة الجسيم وحركة الجسم الصلب بدلالة جملة إحداثية ثابتة، ونصادف في المسائل الميكانيكية التطبيقية حركة جسيم مادي أو حركة جسم صلب بدلالة جملة إحداثية تتحرك هي أيضاً بدورها بدلالة جملة إحداثية أخرى ثابتة، وبالتالي نسمي حركة الجسيم أو حركة الجسم الصلب هذه بدلالة الجملة الثابتة بالحركة المركبة أو المطلقة.

فإذا تدحرجت كرة على سطح باخرة تتحرك بدورها بدلالة الشاطئ الساكن، كانت حركة الكرة بالنسبة للشاطئ هي محصلة حركة تدحرجها بالنسبة للباخرة التي تمثل الجملة الإحداثية المتحركة، وحركتها وهي مقيدة بالباخرة بدلالة الشاطئ الذي يمثل الجملة الإحداثية الثابتة، وفي أبحاث الحركة تعتمد طريقة تحليل الحركة المركبة إلى مركبتين على إدخال جملة إحداثية مساعدة تتحرك بدلالة جملة إحداثية ثابتة.

2- تمثيل الحركة المركبة

تحصل الحركة المركبة لجسيم مادي M عندما يتحرك بدلالة جملة إحداثية $T(OXYZ)$ ، تتحرك بدورها بدلالة جملة إحداثية ثابتة $T_1(O_1X_1Y_1Z_1)$ كما هو مبين في (الشكل-6-1)، حيث تكون الجملة T مقيدة بجسم مادي متحرك، في حين تكون الجملة الإحداثية T_1 مقيدة بجسم مادي نعده ساكناً.



(الشكل-6-1)

إن حركة الجسيم M بدلالة الجملة الإحداثية المتحركة T تدعى بالحركة النسبية (*Relative Motion*)، هذه الحركة التي يلاحظها ناظر ثابت في الجملة المتحركة T والمتحرك معها، ويسمى مسار الجسيم M الخط AB في حركته النسبية بالمسار النسبي، وسرعة الجسيم M خلالها هي السرعة النسبية، ويرمز لها بـــ $\boldsymbol{V_r}$ ، وتكون مماسة للخط AB في النقطة M . أما التسارع النسبي فهو يبين تغير السرعة النسبية بتغير الزمن، والذي يحدث خلال الحركة النسبية ويرمز له بـــ :

$$\boldsymbol{A_r} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{V_r}$$

أما حركة الجملة الإحداثية المتحركة T ، بما فيها الجسم الصلب المقيد بهذه الجملة وكل جسيمات الفراغ المتصلة بها اتصالاً وثيقاً، بدلالة الجملة الثابتة T_1 تدعى بالحركة المكتسبة (*Mouvement d'Entrainement*) أو بالحركة الجرية (*Transport Motion*) وفق المراجع الفرنسية، ويقابلها الرمز e الذي استعمل لرمز هذه الحركة في هذا الكتاب، ويدعى المسار CD بالمسار المكتسب للجسيم M ، وأن سرعة النقطة P المقيدة بالجملة الإحداثية المتحركة T ، الذي ينطبق عليه الجسيم المتحرك M في اللحظة t يمثل السرعة المكتسبة للجسيم M ، ويرمز لها بـــ $\boldsymbol{V_e}$ ، وتكون مماسة للخط CD في النقطة M ، أما التسارع المكتسب فهو يبين ذلك التغير في السرعة المكتسبة بتغير الزمن، والذي يحدث خلال الحركة المكتسبة للجملة الإحداثية المتحركة ويرمز له بـــ :

$$\boldsymbol{A_e} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{V_e}$$

بالتالي حركة الجسيم M بالنسبة للجملة الإحداثية الثابتة T_1 ، تدعى بالحركة المطلقة أو المحصلة (*Absolute Motion or Resultant*)، ويرسم الجسيم M في حركته المطلقة حول الجملة الثابتة T_1 مساراً EF هو المسار المطلق، ونرمز للسرعة المطلقة بـــ $\boldsymbol{V_a}$ ، وتكون مماسة للمسار EF في النقطة M ، أما التسارع المطلق فهو يبين ذلك التغير في السرعة المطلقة بتغير الزمن، ويرمز له بـــ :

$$\boldsymbol{A_a} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{V_a}$$

وكتطبيق على مثال حركة الكرة التي تتدحرج على سطح الباخرة، حيث تكون الحركة النسبية هي حركة الكرة بالنسبة للباخرة، وسرعة هذه الحركة هي السرعة النسبية $\boldsymbol{V_r}$ في اللحظة t ، والحركة المكتسبة للكرة هي حركة الباخرة بالنسبة للشاطئ، وسرعة تلك النقطة من سطح الباخرة التي تنطبق عليها الكرة في اللحظة الزمنية t هي سرعة الحركة المكتسبة $\boldsymbol{V_e}$ للجسيم في هذه اللحظة، أما حركة الكرة بالنسبة للشاطئ فهي الحركة المركبة أو المطلقة للكرة، وسرعتها هي السرعة المطلقة $\boldsymbol{V_a}$ للكرة في اللحظة t .

3- تركيب السرعات

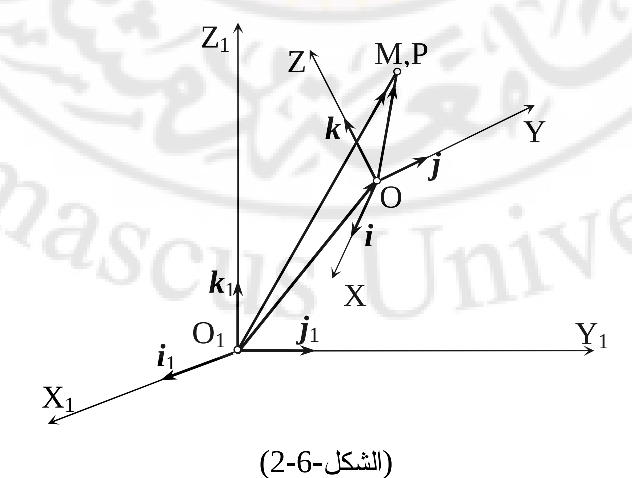
نعد الجسيم M الذي ينطبق في اللحظة t على النقطة $P(x, y, z)$ المقيدة بالجملة الإحداثية المتحركة T ، ولتكن إحداثيات P بدلالة الجملة الثابتة T_1 في اللحظة t هي $P(x_1, y_1, z_1)$ كما هو مبين في (الشكل-6-2)، أما إحداثيات الجسيم M في هذه اللحظة t بدلالة الجملة الثابتة T_1 فهي $M(x_1, y_1, z_1)$ ، ويمكننا كتابة العلاقة الشعاعية:

$$\mathbf{O_1M} = \mathbf{O_1O} + \mathbf{OM}$$

بتعويض إحداثيات M بدلالة الجملة المتحركة $M(x, y, z)$ ، نحصل على:

$$\mathbf{O_1M} = \mathbf{O_1O} + x.\boldsymbol{i} + y.\boldsymbol{j} + z.\boldsymbol{k} \qquad (1\text{-}6)$$

وبما أن الجسيم M يتحرك بدلالة الجملة المتحركة T ، في حين تتحرك الجملة T بدورها بدلالة الجملة T_1 ، وبالتالي القيم x, y, z تتحول مع الزمن، كما تتحول أيضاً المتجهات الواحدية $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{k}$ لمحاور الجملة المتحركة بدلالة الزمن.



(الشكل-6-2)

نشتق العلاقة (6-1):

$$\mathbf{V_M} = (\mathbf{V_O} + x.\dot{\boldsymbol{i}} + y.\dot{\boldsymbol{j}} + z.\dot{\boldsymbol{k}}) + (\dot{x}.\boldsymbol{i} + \dot{y}.\boldsymbol{j} + \dot{z}.\boldsymbol{k}) \qquad (2\text{-}6)$$

حيث الحد الأول من الطرف الثاني هو مجموع سرعتين هما:

$\mathbf{V_O}$ متجه سرعة القطب O بدلالة الجملة الثابتة، ومتجه السرعة $(x.\dot{\boldsymbol{i}} + y.\dot{\boldsymbol{j}} + z.\dot{\boldsymbol{k}})$ الذي يمثل بالعلاقة:

$$x.\dot{\boldsymbol{i}} + y.\dot{\boldsymbol{j}} + z.\dot{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{\Omega_e} \wedge \mathbf{OP} \qquad (3\text{-}6)$$

حيث $\boldsymbol{\Omega e}$ متجه الدوران الآني في حركة الجسم المقيد بالجملة الإحداثية المتحركة T حول القطب، ومركباته هي:

$$\boldsymbol{\Omega_e} = p.\boldsymbol{i} + q.\boldsymbol{j} + r.\boldsymbol{k}$$

والمتجه **OP** يمثل بالعلاقة:

$$\mathbf{OP} = x.\boldsymbol{i} + y.\boldsymbol{j} + z.\boldsymbol{k}$$

للتأكد من ذلك نحسب الجداء الشعاعي:

$$\boldsymbol{\Omega_e} \wedge \boldsymbol{i} = r.\boldsymbol{j} - q.\boldsymbol{k} \;\;,\;\; \boldsymbol{\Omega_e} \wedge \boldsymbol{j} = p.\boldsymbol{k} - r.\boldsymbol{i} \;\;,\;\; \boldsymbol{\Omega_e} \wedge \boldsymbol{k} = q.\boldsymbol{i} - p.\boldsymbol{j} \qquad (4\text{-}6)$$

وبالمقارنة مع علاقات الثلاثية المتحركة (5-16)، التي تبين علاقة مشتق المتجه الواحدي للمحاور المتحركة، والمعطاة بـــ:

$$r.\boldsymbol{j} - q.\boldsymbol{k} = \dot{\boldsymbol{i}} \quad , \quad p.\boldsymbol{k} - r.\boldsymbol{i} = \dot{\boldsymbol{j}} \quad , \quad q.\boldsymbol{i} - p.\boldsymbol{j} = \dot{\boldsymbol{k}} \qquad (5\text{-}6)$$

من (6-4) و (6-5) نحصل على:

$$\dot{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{\Omega_e} \wedge \boldsymbol{i} \quad , \quad \dot{\boldsymbol{j}} = \boldsymbol{\Omega_e} \wedge \boldsymbol{j} \quad , \quad \dot{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{\Omega_e} \wedge \boldsymbol{k} \qquad (6\text{-}6)$$

بالتعويض في (6-3) نحصل على:

$$x.\dot{\boldsymbol{i}} + y.\dot{\boldsymbol{j}} + z.\dot{\boldsymbol{k}} = x(\boldsymbol{\Omega_e} \wedge \boldsymbol{i}) + y(\boldsymbol{\Omega_e} \wedge \boldsymbol{j}) + z(\boldsymbol{\Omega_e} \wedge \boldsymbol{k})$$
$$= \boldsymbol{\Omega_e} \wedge (x.\boldsymbol{i} + y.\boldsymbol{j} + z.\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{\Omega_e} \wedge \mathbf{OP} = \mathbf{V_{P/O}}$$

و P كما ذكرنا هو النقطة المقيدة بالجملة المتحركة T ، والتي ينطبق عليها الجسيم المتحرك M في اللحظة t .

بالتالي الحد الأول من الطرف الثاني للعلاقة (6-2) يمثل:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{O}} + x.\dot{\boldsymbol{i}} + y.\dot{\boldsymbol{j}} + z.\dot{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{O}} + \boldsymbol{V}_{\mathbf{P/O}} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{P}} = \boldsymbol{V}_{e} \qquad (7\text{-}6)$$

السرعة المكتسبة للجسيم M لأنها تمثل سرعة النقطة P بدلالة الجمة الثابتة T_1 .

أما الحد الثاني من الطرف الثاني من العلاقة (6-2)، فيمثل سرعة الجسيم في حركته بدلالة الجملة المتحركة T ، فهو يمثل السرعة النسبية للجسيم M ، بحيث يكون:

$$\dot{x}.\boldsymbol{i} + \dot{y}.\boldsymbol{j} + \dot{z}.\boldsymbol{k} = \boldsymbol{V}_{r} \qquad (8\text{-}6)$$

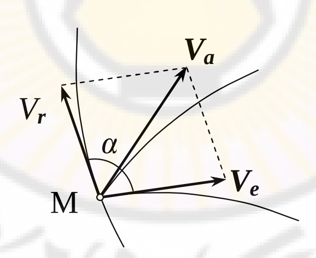
منه بالتعويض في(6-2) نحصل على:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}} = \boldsymbol{V}_{e} + \boldsymbol{V}_{r}$$

فالحد $\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}}$ في العلاقة (6-2) يمثل سرعة الجسيم M حول القطب الثابت O_1 ، فهو يمثل السرعة المطلقة للجسيم M في حركته بدلالة الجملة الثابتة T_1 ، ومنه ينتج:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}} = \boldsymbol{V}_{a} = \boldsymbol{V}_{e} + \boldsymbol{V}_{r} \qquad (9\text{-}6)$$

وبما أن متجهات السرعة تتجه على امتداد المماسات للمسارات المتناظرة، فالسرعة المطلقة للجسيم هي المجموع الهندسي للسرعتين النسبية $\boldsymbol{V}_r$ والمكتسبة $\boldsymbol{V}_e$ ، فهي تمر في M ، وتنطبق على قطر متوازي الأضلاع المرسوم على المتجهين $\boldsymbol{V}_r$ و $\boldsymbol{V}_e$ كما هو مبين في (الشكل-6-3).



(الشكل-6-3)

وإذا كانت الزاوية المحصورة بين اتجاهي المتجهين $\boldsymbol{V}_r$ و $\boldsymbol{V}_e$ تساوى α ، فإن القيمة العددية للسرعة المحصلة تعطى بـــ :

$$V_a = (V_e^2 + V_r^2 + 2V_e.V_r.\cos a)^{1/2} \qquad (10\text{-}6)$$

4- تركيب التسارعات

لتعيين علاقة التسارعات لدينا علاقة السرعات (6-2):

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{M}} = (\boldsymbol{V}_{\mathbf{O}} + x.\dot{\boldsymbol{i}} + y.\dot{\boldsymbol{j}} + z.\dot{\boldsymbol{k}}) + (\dot{x}.\boldsymbol{i} + \dot{y}.\boldsymbol{j} + \dot{z}.\boldsymbol{k})$$

نشتق بدلالة الزمن:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{M}} = (\boldsymbol{A}_{\mathbf{O}} + x.\ddot{\boldsymbol{i}} + y.\ddot{\boldsymbol{j}} + z.\ddot{\boldsymbol{k}}) + (\ddot{x}.\boldsymbol{i} + \ddot{y}.\boldsymbol{j} + \ddot{z}.\boldsymbol{k}) + 2(\dot{x}.\dot{\boldsymbol{i}} + \dot{y}.\dot{\boldsymbol{j}} + \dot{z}.\dot{\boldsymbol{k}})$$

حيث الحد:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{O}} + (x.\ddot{\boldsymbol{i}} + y.\ddot{\boldsymbol{j}} + z.\ddot{\boldsymbol{k}}) = \boldsymbol{A}_{\mathbf{O}} + \frac{d}{dt}\boldsymbol{V}_{\mathbf{P/O}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{O}} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{P/O}} = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{e}} \qquad (11\text{-}6)$$

يمثل التسارع المكتسب.

ولدينا أيضاً الحد:

$$\ddot{x}.\boldsymbol{i} + \ddot{y}.\boldsymbol{j} + \ddot{z}.\boldsymbol{k} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{r}} \qquad (12\text{-}6)$$

الذي يمثل التسارع النسبي.

أما الحد الأخير فهو يساوي إلى:

$$2(\dot{x}.\dot{\boldsymbol{i}} + \dot{y}.\dot{\boldsymbol{j}} + \dot{z}.\dot{\boldsymbol{k}}) = 2[\dot{x}(\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{e}} \wedge \boldsymbol{i}) + \dot{y}(\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{e}} \wedge \boldsymbol{j}) + \dot{z}(\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{e}} \wedge \boldsymbol{k})]$$
$$= 2\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{e}} \wedge (\dot{x}.\boldsymbol{i} + \dot{y}.\boldsymbol{j} + \dot{z}.\boldsymbol{k}) = 2(\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{e}} \wedge \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{r}})$$

نضع مساواة الحد الأخير على الشكل:

$$2(\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{e}} \wedge \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{r}}) = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{c}} \qquad (13\text{-}6)$$

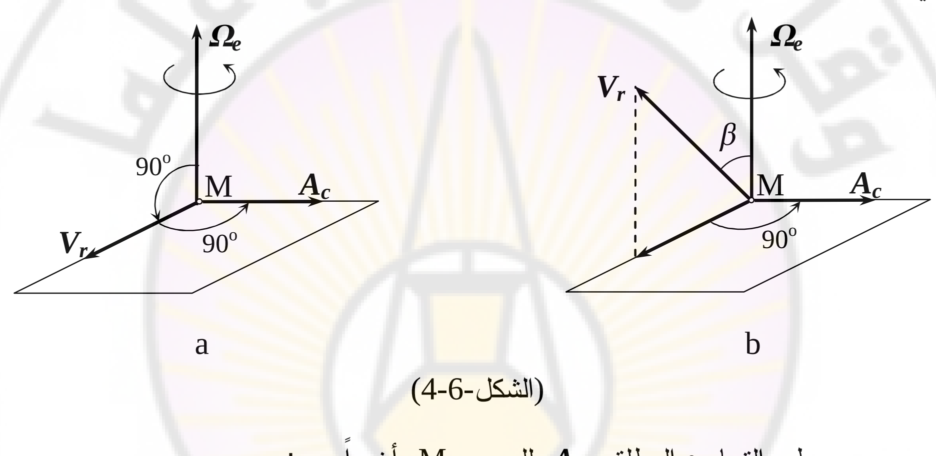
حيث $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{c}}$ له أبعاد التسارع، ويسمى بالتسارع المتمم (*Complementary Acceleration*)، أو تسارع كوريوليس (*Coriolis Acceleration*)، نسبة للعالم الفرنسي جوستان كوريوليس (*Justin Coriolis*) الذي اشتهر بأبحاثه في مجالات الميكانيك النظرية والتطبيقية، ويميز هذا التسارع التغير في متجه السرعة النسبية $\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{r}}$ خلال الحركة المكتسبة، كذلك التغير في متجه السرعة المكتسبة $\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{e}}$ خلال الحركة النسبية، ويساوي ضعفي حاصل الضرب الشعاعي للسرعة الزاوية خلال الحركة المكتسبة، بالسرعة النسبية للجسيم، وقيمته العددية تعطى بـــ :

$$A_c = 2\left|w_e.V_r\right|\sin b \qquad (14\text{-}6)$$

حيث β الزاوية المحصورة بين $\boldsymbol{V_r}$ و $\boldsymbol{\Omega_e}$ ، ويتجه هذا التسارع عمودياً على المستوي المحدد بـــ $\boldsymbol{V_r}$ و $\boldsymbol{\Omega_e}$ ، ويمكن تعيينه استناداً على اتجاه $\boldsymbol{\Omega_e}$ وقيمة الزاوية β :

فإذا كانت الزاوية ($\beta = \pi / 2$)، فإنه يكفي تدوير $\boldsymbol{V_r}$ بحيث ينطبق على $\boldsymbol{A_c}$ باتجاه دوران ω_e ، كما هو مبين في (الشكل-6-4a).

وإذا كانت الزاوية ($\beta < \pi / 2$)، فإنه يكفي إسقاط $\boldsymbol{V_r}$ على المستوي العمودي على $\boldsymbol{\Omega_e}$ ، ثم تدوير مسقط $\boldsymbol{V_r}$ بحيث ينطبق على $\boldsymbol{A_c}$ باتجاه دوران ω_e ، كما هو مبين في (الشكل-6-4b).



(الشكل-6-4)

ويعطى التسارع المطلق $\boldsymbol{A_a}$ للجسيم M أخيراً بـــ :

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{A_a} = \boldsymbol{A_e} + \boldsymbol{A_r} + \boldsymbol{A_c} \qquad (15\text{-}6)$$

فالتسارع المطلق $\boldsymbol{A_a}$ لا يساوي كما في الحالة العامة المجموع الهندسي للتسارع النسبي والتسارع المكتسب، بل ينبغي أن نجمع لهما التسارع المتمم.

5- انعدام تسارع كوريوليس

ينعدم تسارع كوريوليس $\boldsymbol{A_c} = 2(\boldsymbol{\Omega_e} \wedge \boldsymbol{V_r})$ في الحالات التالية:

- عندما ($\boldsymbol{\Omega_e} = 0$)، أي عندما تكون السرعة الزاوية للحركة المكتسبة في اللحظة المعطاة في أثناء الدوران المكتسب مساوية للصفر، أي أن الحركة المكتسبة انسحابية، بمعنى أن دوران الجملة المتحركة T معدوم حول القطب O ، فهو معدوم حول أي قطب نختاره في هذه الجملة.

وتؤول حركة الجسيم P المقيدة بالجملة المتحركة T والمنطبقة على أوضاع الجسيم M في كل لحظة، إلى حركة انسحابية بدلالة الجملة الثابتة T_1 ، بالتالي تكتسب كل الجسيمات M سرعاً وتسارعات متسايرة تساير سرعة القطب O وتسارعه في حركته بدلالة T_1 .

ومنه تصبح السرعة المطلقة:

$$\boldsymbol{V}_a = \boldsymbol{V}_e + \boldsymbol{V}_r = \boldsymbol{V}_{\mathbf{O}} + \boldsymbol{V}_r$$

أما التسارع المطلق:

$$\boldsymbol{A}_a = \boldsymbol{A}_e + \boldsymbol{A}_r = \boldsymbol{A}_{\mathbf{O}} + \boldsymbol{A}_r$$

- عندما ($\boldsymbol{V_r} = 0$)، أي عندما تكون السرعة النسبية تساوي الصفر في اللحظة المعطاة، بالتالي الجسيم M ثابت بدلالة الجملة المتحركة T ، فهو في حالة اتزان بدلالة هذه الجملة، ويكون $\boldsymbol{A_r}$ التسارع النسبي له معدوماً أيضاً.

وتؤول حركة الجسيم M بدلالة الجملة الثابتة T_1 إلى حركة الجسيم P المنطبقة عليه بدلالة هذه الجملة.

ومنه تصبح السرعة المطلقة:

$$\boldsymbol{V}_a = \boldsymbol{V}_e = \boldsymbol{V}_P = \boldsymbol{V}_{\mathbf{O}} + \boldsymbol{V}_{\mathbf{P/O}}$$

أما التسارع المطلق:

$$\boldsymbol{A}_a = \boldsymbol{A}_e = \boldsymbol{A}_P = \boldsymbol{A}_{\mathbf{O}} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{P/O}}$$

- عندما ($\alpha = 0$) أو ($\alpha = \pi$)، وبالتالي ($\boldsymbol{V_r} \,//\, \boldsymbol{\Omega_e}$)، أي عندما تحدث الحركة النسبية في اتجاه موازٍ لمحور الدوران المكتسب $\boldsymbol{\Omega_e}$ ، أو إذا كان المتجه $\boldsymbol{V_r}$ موازياً لهذا المحور في اللحظة المعطاة.

فإذا اكتسب الجسيم M في اللحظة t في حركته بدلالة الجملة المتحركة T سرعة توازي السرعة الزاوية $\boldsymbol{\Omega_e}$ لدوران الجملة المتماسكة المقيدة بـــ T حول القطب O في اللحظة t ذاتها انعدم عندها التسارع المتمم $\boldsymbol{A_c}$ في هذه اللحظة.

ومنه تصبح السرعة المطلقة:

$$\boldsymbol{V}_a = \boldsymbol{V}_e + \boldsymbol{V}_r = \boldsymbol{V}_{\mathbf{O}} + \boldsymbol{V}_{\mathbf{P/O}} + \boldsymbol{V}_r$$

أما التسارع المطلق:

$$\boldsymbol{A}_a = \boldsymbol{A}_e + \boldsymbol{A}_r = \boldsymbol{A}_{\mathbf{O}} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{P/O}} + \boldsymbol{A}_r$$

بالنتيجة يمكن استخدام علاقة السرعة المطلقة (6-9)، وعلاقة التسارع المطلق (6-15) في التحليل الحركي للتركيبات الآلية، التي تحتوي على أجزاء تنزلق فوق بعضها بعضاً، إذ تمكن العلاقتان من ربط الحركات النسبية والمطلقة للمحاور المنزلقة والحلقات.

ويكون مفهوم تسارع كوريوليس من جهة ثانية مفيداً جداً، في دراسة حركات القذائف ذات المدى البعيد وغيرها من الأجسام، التي تتأثر حركاتها بشكل كبير بدوران الأرض، إذ إن مجموعة الإحداثيات القائمة المرتبطة بالأرض، لا تمثل في الحقيقة مجموعة المقارنة النيوتونية، إذ أن مثل هذه المجموعة يجب أن تعد كمجموعة دورانية، فلذا فإن العلاقات التي تم استخراجها في هذا الفصل ستسهل دراسة حركة الأجسام وتحليلها بالنسبة لمجموعة الإحداثيات القائمة المرتبطة بالأرض.

مسألة -6-1

يدور قرص دائري حول محور يمر بمركزه بسرعة زاوية ثابتة ω_0 باتجاه عكس حركة عقارب الساعة، وعلى قطر من أقطاره يتحرك الجسيم A بسرعة ثابتة قدرها V بالنسبة للقرص، كما هو مبين في (الشكل-6-5a).

اشرح حركة الجسيم، وأوجد في اللحظة t السرعة المطلقة والتسارع المطلق له.

الحل:

يمكن دراسة حركة الجسيم M عند كل وضع له، بأنها حركة مركبة من مجموع حركتين هما:

حركة الجسيم A وهو مقيد بالقرص الذي يدور حول محور مار في مركزه، تمثل الحركة المكتسبة له، وهي حركة دورانية منتظمة بسرعة زاوية ثابتة قدرها ($\omega_e = \omega_0$)، ويدور في اللحظة t الزاوية ($\theta = \omega_0 . t$).

وحركة الجسيم A بالنسبة للقرص تمثل الحركة النسبية له، وهي حركة مستقيمة منتظمة مسارها قطر القرص، ويتحرك عليه بسرعة ثابتة قدرها ($V_r = V$)، ويقطع في اللحظة t المسافة ($OA = V . t$).

لحساب السرعة المطلقة $\boldsymbol{V_a}$ للجسيم لدينا:

$$\boldsymbol{V_a} = \boldsymbol{V_e} + \boldsymbol{V_r}$$

حيث السرعة المكتسبة $\boldsymbol{V_e}$ للجسيم تساوي إلى:

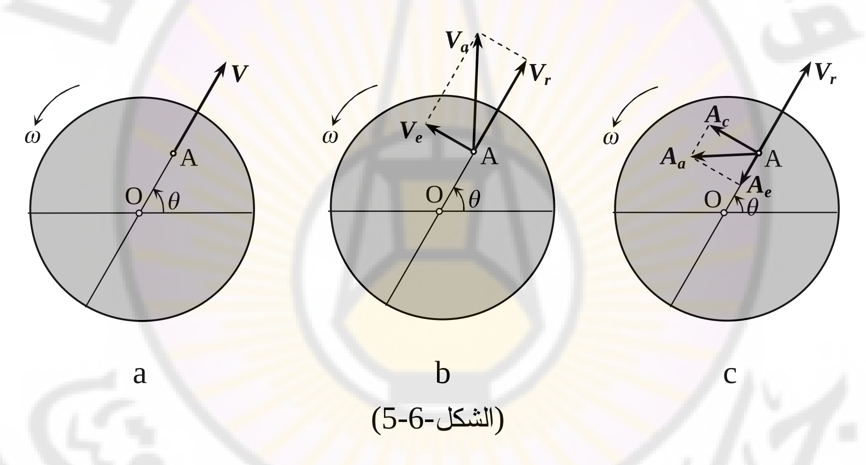
$$V_e = w_e . \text{OA} = w_e . V . t$$

والسرعة النسبية $\boldsymbol{V_r}$ لــه تساوي إلى:

$$V_r = V$$

بالتالي السرعة المطلقة الكلية للجسيم تساوي المجموع الهندسي لكل من $\boldsymbol{V_a}$ و $\boldsymbol{V_r}$ كما في (الشكل-5b-6)، وقيمتها العددية:

$$V_a = (V_e^2 + V_r^2)^{1/2} = V(1 + w_0^2 . t^2)^{1/2}$$



(الشكل-6-5)

لحساب التسارع المطلق للجسيم $\boldsymbol{A_a}$ ، لدينا العلاقة:

$$\boldsymbol{A_a} = \boldsymbol{A_e} + \boldsymbol{A_r} + \boldsymbol{A_c}$$

حيث التسارع المكتسب $\boldsymbol{A_e}$ للجسيم هو تسارع ناظمي فحسب، لأن الحركة المكتسبة للجسيم ممثلة بحركة القرص الدورانية المنتظمة، والقيمة العددية له:

$$A_e = A_e^n = w_e^2 . OA = w_0^2 . V . t$$

والتسارع النسبي $\boldsymbol{A_r}$ للجسيم معدوم، لأن الحركة النسبية للجسيم ممثلة بحركة مستقيمة منتظمة، أي:

$$A_r = 0$$

أما تسارع كوريوليس $\boldsymbol{A_c}$ فإنه يعطى بالعلاقة:

$$A_c = 2 w_e . V_r . \sin a$$

حيث α الزاوية المحصورة بين المتجهين $\boldsymbol{V_r}$ و $\boldsymbol{\Omega_e}$ العمودي على مستوي حركة القرص والمار من مركزه، بالتالي فإن ($\alpha = \pi / 2$) دوماً في الحركة المستوية، ومنه بالتعويض:

$$A_c = 2w_0 .V$$

ونحصل على منحى واتجاه تسارع كوريوليس، بدوران متجه السرعة النسبية $\boldsymbol{V_r}$ للجسيم زاوية قدرها $\pi / 2$ في اتجاه دوران ω_0 ، أي اتجاه حركة القرص.

بالتالي التسارع الكلي يساوي المجموع الهندسي لكل من $\boldsymbol{A_c}$ و $\boldsymbol{A_e}$ كما هو مبين في (الشكل-6-4c)، وقيمته العددية:

$$\boldsymbol{A_a} = (\boldsymbol{A_e^2} + \boldsymbol{A_c^2})^{1/2} = (4w_0^4.\boldsymbol{V}^2 + w_0^4.\boldsymbol{V}^2.\boldsymbol{t}^2)^{1/2} = w_0.\boldsymbol{V}(4 + w_0^2.\boldsymbol{t}^2)$$

مسألة -6-2

تدور حلقة دائرية نصف قطرها (R = 1 m) في المستوي الشاقولي حول محور مار من المفصل O ، باتجاه معاكس لدوران عقارب الساعة وفق المعادلة $(j = p.t)$، حيث φ تمثل الزاوية التي يصنعها القطر OA مع الأفق وتقاس بالراديان، و t تمثل الزمن ويقاس بالثانية.

ويتحرك الجسيم M على محيط الحلقة باتجاه دوران عقارب الساعة وفق المعادلة $(s = p.t)$، حيث s تمثل المسافة المقطوعة وتقاس بالمتر، كما في (الشكل-6-6a).

اشرح الحركة المركبة للجسيم M ، وعين مميزات حركته في اللحظات:

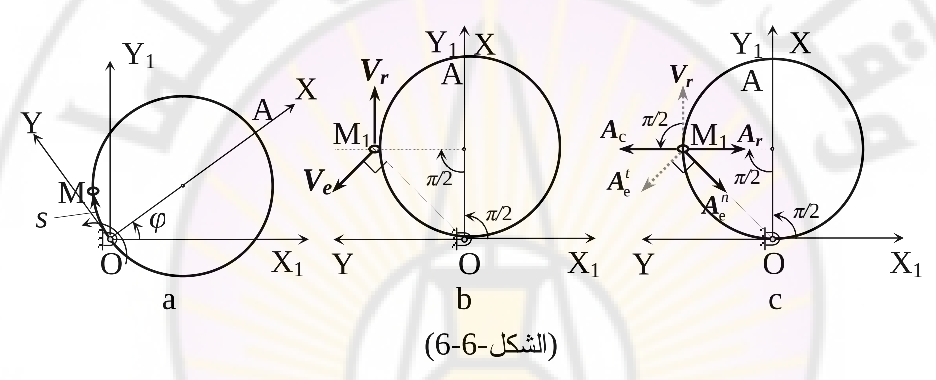
(t_1 = 0.5 sec) و (t_2 = 1 sec).

الحل:

يمكن دراسة حركة الجسيم M عند كل وضع له، بأنها حركة مركبة من مجموع حركتين هما:

حركة الجسيم M وهو مقيد بالحلقة بدلالة الجملة OX_1Y_1 الذي يدور حول محور مار من المفصل الثابت O ، تمثل الحركة المكتسبة للجسيم، وهي حركة دورانية منتظمة وفق المعادلة $(j = p.t)$، وبسرعة زاوية ثابتة قدرها $(w_e = \dot{j} = p \text{ rad/sec})$ باتجاه معاكس لحركة عقارب الساعة، وتدور الحلقة في اللحظة t الزاوية $(j = \dot{j}.t)$. خلالها يكون للجسيم M سرعة خطية مكتسبة ثابتة قدرها $(V_e = \text{OM}.\dot{j})$، عمودية على نصف قطر الدوران OM باتجاه دوران ω_e ، وتسارع خطي ناظمي مكتسب ثابت قدره $(A_e = A_e^n = \text{OM}.w_e^2 = \text{OM}.p^2 \text{ m/sec}^2)$، يتجه دوماً من موقع الجسيم M نحو مركز الدوران O .

وحركة الجسيم M بالنسبة للحلقة المقيدة بجملة المحاور OXY ، حيث OX ينطبق على القطر OA ، تمثل الحركة النسبية للجسيم، وهي حركة دائرية منتظمة وفق المعادلة $(s = \mathrm{OM} = \pi\,.t)$، ومسارها محيط الحلقة، وباتجاه حركة عقارب الساعة، ويتحرك عليه بسرعة نسبية ثابتة قدرها $(V_r = \dot{s} = \pi \ \mathrm{m/sec})$ تمس الحلقة في موقع الجسيم M ، وبتسارع نسبي ثابت قدره $(A_r = A_r^n = V_r^2 / R = \pi^2 \ \mathrm{m/sec^2})$، ويتجه دوماً من موقع الجسيم نحو مركز الحلقة، ويقطع في اللحظة t المسافة المنحنية $(\mathrm{OM} = s = V_r\,.t \ \ \mathrm{m})$.



(الشكل-6-6)

نعين موضع الجسيم M في اللحظة $(t_1 = 0.5 \text{ sec})$:

في هذه اللحظة يكون $(s_1 = \mathrm{OM}_1 = 0.5\pi \ \mathrm{m})$ و $(\varphi_1 = 0.5\pi)$، أي أن الجسيم M يقطع ربع محيط الحلقة الموافق للقوس OM_1 ، ويصبح القطر OA في وضع شاقولي، كما هو مبين في (الشكل-6-6b).

لحساب السرعة المطلقة $\boldsymbol{V_a}$ للجسيم، لدينا العلاقة:

$$\boldsymbol{V_a} = \boldsymbol{V_e} + \boldsymbol{V_r}$$

حيث السرعة المكتسبة $\boldsymbol{V_e}$ للجسيم تساوي:

$$V_e = \mathrm{OM}_1 .\omega_e = \sqrt{2}R.\dot{\varphi} = \sqrt{2}.\pi \ \ \mathrm{m/sec}$$

والسرعة النسبية $\boldsymbol{V_r}$ لـــه تساوي:

$$V_r = \dot{s} = \pi \ \ \mathrm{m/sec}$$

والسرعة المطلقة الكلية للجسيم تساوي المجموع الهندسي لكل من $\boldsymbol{V_a}$ و $\boldsymbol{V_r}$ كما في (الشكل-6-6b)، وقيمتها العددية:

$$\boldsymbol{V_a} = (\boldsymbol{V_e}^2 + \boldsymbol{V_r}^2 + 2\boldsymbol{V_e}.\boldsymbol{V_r}.\cos 135^o)^{1/2} = (2\pi^2 + \pi^2 - 2\sqrt{2}.\pi.\pi / \sqrt{2})^{1/2}$$

$$\boldsymbol{V_a} = \pi \ \ \mathrm{m/sec}$$

لحساب التسارع المطلق $\boldsymbol{A_a}$ للجسيم، لدينا العلاقة:

$$\boldsymbol{A_a} = \boldsymbol{A_e} + \boldsymbol{A_r} + \boldsymbol{A_c}$$

بما أن الحركة المكتسبة هي حركة دورانية، فالتسارع المكتسب $\boldsymbol{A_e}$ يعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{A_e} = \boldsymbol{A_e^n} + \boldsymbol{A_e^t}$$

والقيمة العددية لمركباته:

$$A_e^t = \mathrm{OM}_1.e_e = 0 \qquad , \qquad A_e^n = \mathrm{OM}_1.w_e^2 = \sqrt{2}R.p^2$$

بذلك يكون التسارع المكتسب مساوياً:

$$A_e = A_e^n = \sqrt{2}p^2 \ \mathrm{m/sec^2}$$

ويتجه نحو مركز الدوران O .

وبما أن الحركة النسبية هي حركة دائرية، فالتسارع النسبي $\boldsymbol{A_r}$ يعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{A_r} = \boldsymbol{A_r^n} + \boldsymbol{A_r^t}$$

والقيمة العددية لمركباته:

$$A_r^t = \frac{d}{dt}V_r = \&\& = 0 \qquad , \qquad A_r^n = \frac{V_r^2}{R} = p^2$$

بذلك يكون التسارع النسبي مساوياً:

$$A_r = A_r^n = p^2 \ \mathrm{m/sec^2}$$

ويتجه نحو مركز الحلقة.

ويعين تسارع كوريوليس بالعلاقة:

$$A_c = 2w_e.V_r.\sin a$$

حيث متجه السرعة الزاوية للحركة المكتسبة $\boldsymbol{\Omega_e}$ منحاه عمودي على مستوي الشكل ويتجه وفق حركة اليد اليمنى، فيكون باتجاه القارئ، بينما متجه السرعة النسبية فإنه يتجه وفق المماس كما هو مبين على الشكل، أي أن الزاوية α المحصورة بين متجهي السرعة الزاوية للحركة المكتسبة والسرعة النسبية تساوي ($\alpha = 90^o$)، وذلك لأن الحركة تقع في مستوٍ، بالتالي تكون قيمة تسارع كوريوليس ثابتة في أي لحظة زمنية، وتساوي:

$$A_c = 2p.p = 2p^2 \ \mathrm{m/sec^2}$$

ويتعين اتجاهه بتدوير متجه السرعة النسبية زاوية $\pi/2$ باتجاه دوران ω_e كما هو مبين في (الشكل-6-6c).

بالتالي يمكن تعيين القيمة العددية للتسارع المطلق A_a للجسيم بطريقة المساقط، وذلك بإسقاط علاقة التسارع على المحاور OX_1Y_1 ، فنجد:

$$\rightarrow A_{aX_1} = A_r - A_c + A_e.\cos 45^o = p^2 - 2p^2 + p^2 = 0$$

$$\downarrow A_{aY_1} = A_e.\cos 45^o = p^2$$

وتكون القيمة العددية للتسارع المطلق:

$$A_a = (A_{aX_1}^2 + A_{aY_1}^2)^{1/2} = A_{aY_1} = p^2 \text{m/sec}^2$$

وينطبق على المحور Y_1 ويتجه نحو الأسفل.

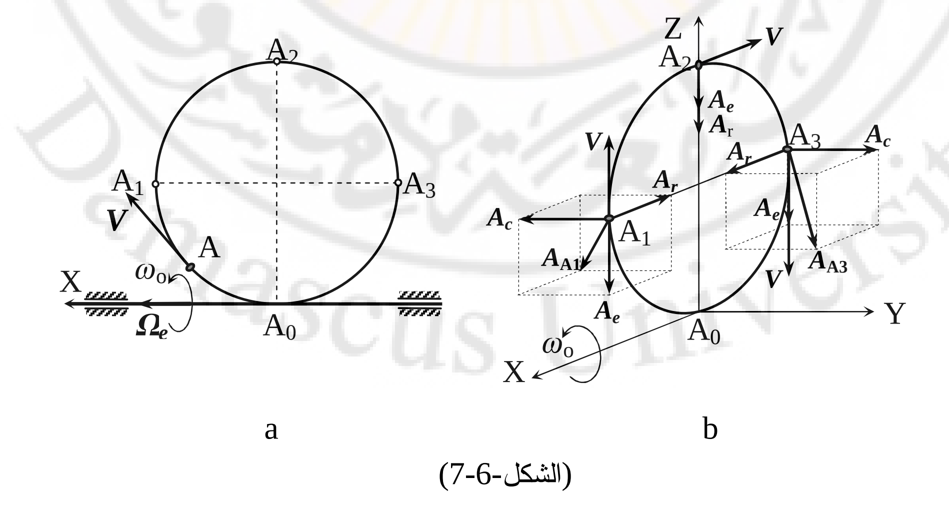
ملاحظة:

يترك للطالب تعيين السرعة المطلقة والتسارع المطلق للجسيم M في اللحظة t_2 .

مسألة 3-6-

سلك دائري نصف قطره a يدور حول المحور X بسرعة زاوية ثابتة قدرها ω_0 باتجاه عكس دوران عقارب الساعة، وعلى هذا السلك يتحرك جسيم A بسرعة ثابتة بالقيمة قدرها V . أوجد التسارع الكلي لهذا الجسيم عندما يكون في الوضعيات A_1 و A_2 و A_3 المبينة في (الشكل-6-7a).

الحل:



(الشكل-6-7)

يمكن دراسة حركة الجسيم A عند كل وضع له، بأنها حركة مركبة من مجموع حركتين هما:

حركة الجسيم A وهو مقيد بالسلك الذي يدور حول المحور X ، تمثل الحركة المكتسبة له، وهي حركة دورانية منتظمة بسرعة زاوية ثابتة قدرها ($\omega_e = \omega_0$).

وحركة الجسيم A بالنسبة للسلك الدائري تمثل الحركة النسبية له، وهي حركة دائرية منتظمة على السلك الدائري، وتتحرك عليه بسرعة محيطية ثابتة قدرها ($V_r = V$).

ويعطى التسارع الكلي للجسيم بالعلاقة:

$$\boldsymbol{A_a} = \boldsymbol{A_e} + \boldsymbol{A_r} + \boldsymbol{A_c}$$

ففي الموضع A_1 تكون القيم العددية لهذه التسارعات كما يلي:

التسارع المكتسب:

$$A_e = A_e^n = w_e^2 .a = w_0^2 .a$$

والتسارع النسبي:

$$A_r = w_r^2 .a = V_r^2 / a = V^2 / a$$

أما تسارع كوريوليس:

$$A_c = 2w_e .V_r .\sin(p / 2) = 2w_0 .V$$

ويكون اتجاهها كما هو مبين في (الشكل-5b-6)، أما القيمة العددية للتسارع الكلي فهي:

$$A_{A_1} = (A_e^2 + A_r^2 + A_c^2)^{1/2} = [(V^4 / a^2) + w_0^2 (4V^2 + w_0^2 .a^2)]^{1/2}$$

أما في الموضع A_2 فتكون القيم العددية لهذه التسارعات كما يلي لدينا:

التسارع المكتسب:

$$A_e = A_e^n = w_e^2 .2a = w_0^2 .2a = 2w_0^2 .a$$

والتسارع النسبي:

$$A_r = w_r^2 .a = V_r^2 / a = V^2 / a$$

أما تسارع كوريوليس:

$$A_c = 2w_e .V_r .\sin p = 0$$

ويكون اتجاهها كما هو مبين في (الشكل-7b-6)، أما القيمة العددية للتسارع الكلي فهي:

$$A_{A_2} = A_e + A_r = 2w_0^2 .a + V^2 / a$$

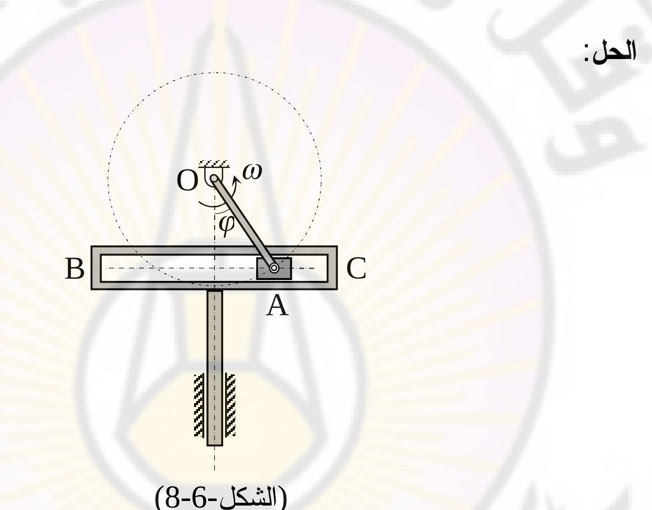
أما في الموضع A_3 فهو مشابه للوضعية A_1 ، إلا أن تسارع $\boldsymbol{A_c}$ في الموضع A_3 معاكس لتسارع $\boldsymbol{A_c}$ في الموضع A_1 ، كما هو واضح على (الشكل-7b-6).

مسألة 4-6-

يدور المرفق ($OA = r = 30$ cm) في التركيبة الآلية المبينة في (الشكل-6-8) حول المحور المار من O والعمودي على مستويها، بعدد دورات ثابت قدرها ($n = 120$ r.p.m) باتجاه عكس حركة عقارب الساعة، وتتصل نهاية المرفق A مفصلياً مع منزلقة تتحرك داخل الأخدود الأفقي BC ، الذي يتحرك حركة انسحابية على مسار شاقولي.

ادرس حركة المنزلقة A عند الوضع الموافق للزاوية φ ، وأوجد مميزات الحركة لأجزاء التركيبة الآلية، وقيمها العظمى.

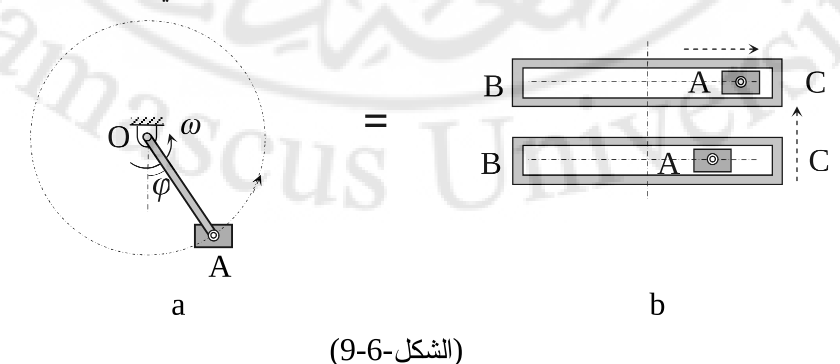
الحل:



(الشكل-6-8)

عند كل وضع للتركيبة يمكن دراسة حركة المنزلقة A الموضحة في (الشكل-6-9)، كما يلي:

بما أن المنزلقة A جسيم متمفصل مع المرفق OA ، فإنه يتحرك حركة دائرية منتظمة حول O ، هذه الحركة تمثل الحركة المطلقة للمنزلقة كما هو مبين في (الشكل-6-9a).

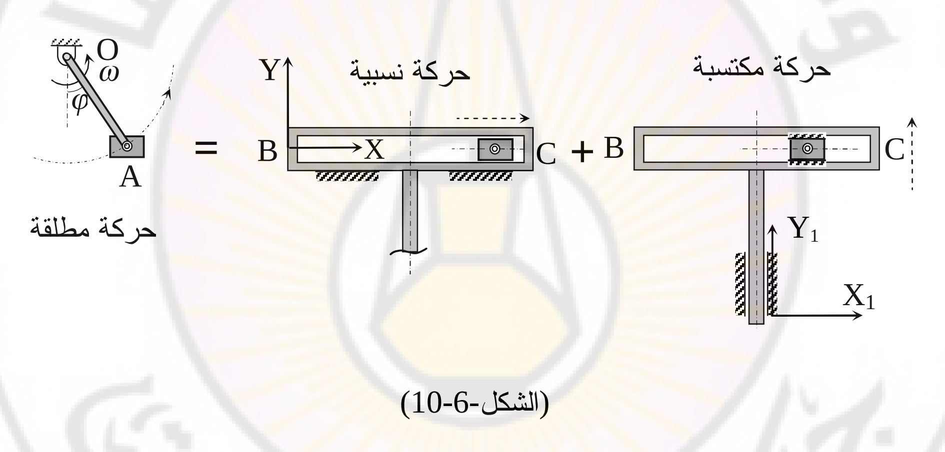


(الشكل-6-9)

وبما أن المنزلقة A جسيم يتحرك داخل الأخدود الأفقي BC ، الذي يتحرك بدوره حركة انسحابية على مسار شاقولي هي حركة مركبة من مجموع حركتين كما هو مبين في (الشكل-6-9b)، هما:

حركة المنزلقة A وهي مقيدة بالأخدود الأفقي BC الذي يتحرك حركة انسحابية على مسار شاقولي بالنسبة لمجموعة المحاور الثابتة $O_1X_1Y_1$ ، تمثل الحركة المكتسبة لها كما هو مبين في (الشكل-6-10).

وحركة المنزلقة A بالنسبة للأخدود الأفقي BC ، أي بالنسبة لمجموعة المحاور المتحركة OXY تمثل الحركة النسبية لها، وهي حركة مستقيمة على مسار أفقي كما هو مبين في (الشكل-6-10).



(الشكل-6-10)

- دراسة السرعة حيث متجهاتها مبينة في (الشكل-6-11a):

المرفق OA :

يتحرك المرفق OA حركة دورانية منتظمة حول المفصل الثابت O ، بسرعة زاوية قدرها:

$$\omega_{OA} = 120\,\pi / 30 = 4\pi \text{ rad/sec}$$

منه:

$$V_A = OA.w_{OA} = 30 \times 4p = 120p \text{ cm/sec}$$

التي تمثل السرعة المطلقة للمنزلقة $\boldsymbol{V_a}$ ، وهي عمودية على المرفق OA ، المعيّن وضعيته بالزاوية φ ، والمقاسة بدءاً من الشاقول، وقيمتها:

$$\varphi = \omega.t = 4\,\pi.t$$

المنزلقة A :

تعطى السرعة المطلقة $\boldsymbol{V_a}$ للمنزلقة A ، كون حركتها مركبة من حركة مكتسبة وحركة نسبية، بالعلاقة:

$$\boldsymbol{V_a} = \boldsymbol{V_e} + \boldsymbol{V_r}$$

حيث السرعة المكتسبة $\boldsymbol{V_e}$ للمنزلقة تساوي:

$$V_e = V_a .\sin j = 120p .\sin 4p .t \quad \text{cm/sec}$$

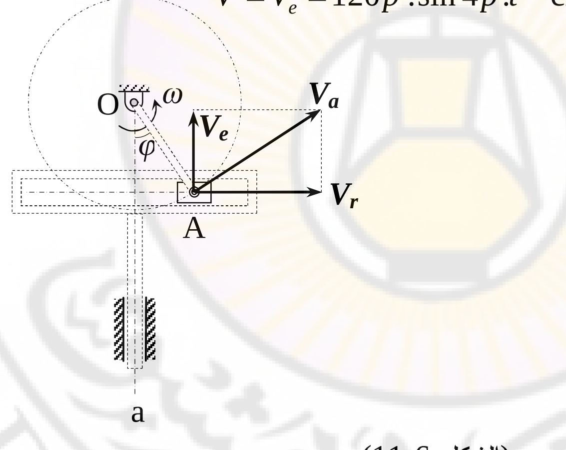
والسرعة النسبية $\boldsymbol{V_r}$ لها تساوي:

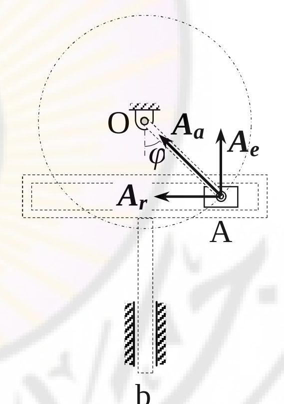
$$V_r = V_a .\cos j = 120p .\cos 4p .t \quad \text{cm/sec}$$

الأخدود الأفقي BC :

يتحرك الأخدود الأفقي BC حركة انسحابية على مسار شاقولي يوازي المحور O_1Y_1 بالنسبة لمجموعة المحاور الثابتة $O_1X_1Y_1$، بسرعة قدرها:

$$V = V_e = 120p .\sin 4p .t \quad \text{cm/sec}$$





(الشكل-6-11)

- دراسة التسارع حيث متجهاتها مبينة في (الشكل-6-11b):

المرفق OA :

يتحرك المرفق OA حركة دورانية منتظمة حول المفصل الثابت O ، بتسارع زاوي معدوم:

$$e_{\text{OA}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A_{\text{A}}^{t} = 0$$

بالتالي:

$$\boldsymbol{A}_{\text{A}} = \boldsymbol{A}_{\text{A}}^{n} + \boldsymbol{A}_{\text{A}}^{\tau} = \boldsymbol{A}_{\text{A}}^{n}$$

بالتعويض:

$$A_A = A_A^n = OA.w_{OA}^2 = 30(4p)^2 = 480p^2 \text{ cm/sec}^2$$

التي تمثل التسارع المطلق للمنزلقة $\boldsymbol{A_a}$ ، المنطبق على المرفق OA ، المعيّن وضعيته بالزاوية φ ، ويتجه نحو مركز الدوران O .

المنزلقة A :

يعطى التسارع المطلق $\boldsymbol{A_a}$ للمنزلقة بكون حركتها مركبة من حركة مكتسبة وحركة نسبية، بالعلاقة:

$$\boldsymbol{A_a} = \boldsymbol{A_e} + \boldsymbol{A_r} + \boldsymbol{A_c}$$

حيث التسارع المكتسب $\boldsymbol{A_e}$ للمنزلقة يساوي:

$$\boldsymbol{A_e} = \boldsymbol{A_a}.\cos j = 480p^2.\cos 4p.\boldsymbol{t} \quad \text{cm/sec}^2$$

والتسارع النسبي $\boldsymbol{A_r}$ لها تساوي:

$$A_r = A_a.\sin j = 480p^2.\sin 4p.t \quad \text{cm/sec}^2$$

والتسارع المتمم $\boldsymbol{A_c}$ لها يعطى بـــ :

$$A_c = 2w_e.V_r.\sin a$$

وبما أن:

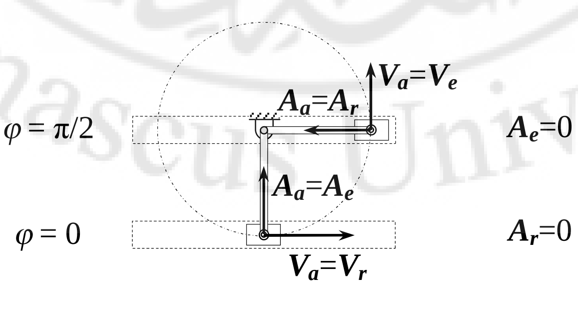
$$w_e = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A_c = 0$$

الأخدود الأفقي BC :

يتحرك الأخدود الأفقي BC حركة انسحابية على مسار شاقولي يوازي المحور O_1Y_1 بالنسبة لمجموعة المحاور الثابتة $O_1X_1Y_1$، بتسارع قدره:

$$A = A_e = 480p^2.\cos 4p.t \quad \text{cm/sec}^2$$

والقيم العظمى المطلوبة مبينة على (الشكل-6-12):

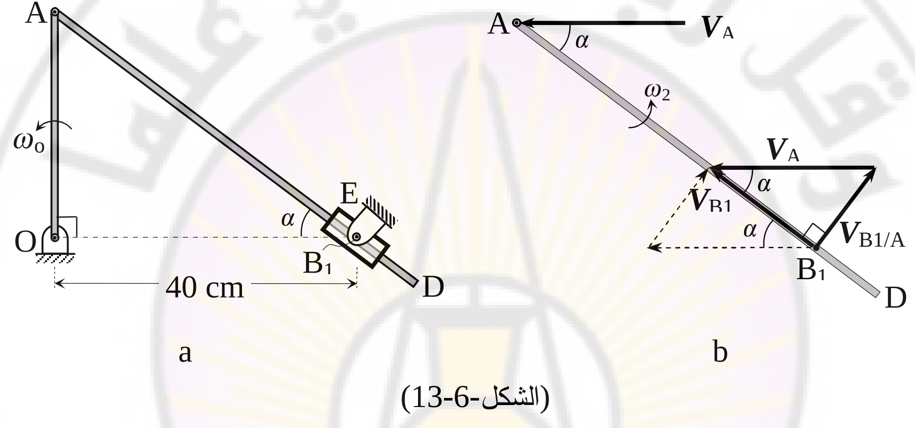


(الشكل-6-12)

مسألة -6-5

في الآلية المرفقية الموضحة في (الشكل-6-13a)، يدور المرفق (OA = 30 cm) بسرعة زاوية ثابتة قدرها ω_0 ، ويتمفصل في A مع ذراع التوصيل AD ، الذي يمر عبر منزلقة متأرجحة B ، تدور حول مفصل ثابت E . ادرس حركة الآلية في الوضعية الموضحة في الشكل.

الحل:



(الشكل-6-13)

من المثلث ΔOAB_1 المبين في (الشكل6-13a)، يمكن حساب الطول:

$$AB_1 = (OA^2 + OB^2)^{1/2} = [(30)^2 + (40)^2]^{1/2} = 50\,\text{cm}$$

دراسة السرعة:

المرفق OA يتحرك حركة دورانية حول المفصل الثابت O بسرعة زاوية:

$$w_{OA} = w_1 = w_0$$

ومنه:

$$V_A = OA.w_1 = 30w_0$$

أما ذراع التوصيل AD فيتحرك حركة مستوية عامة، منه:

$$\boldsymbol{V_{B_1}} = \boldsymbol{V_A} + \boldsymbol{V_{B_1/A}}$$

حيث B_1 جسيم من ذراع التوصيل AD ، وسرعته في هذه اللحظة تتجه وفق ذراع التوصيل B_1A ، بالتالي نرسم مثلث السرع الموضح في (الشكل-6-13b)، وبتطبيق علاقة لامي عليه:

$$\frac{V_A}{\sin 90} = \frac{V_{B_1A}}{\sin a} = \frac{V_{B_1}}{\sin(90-a)}$$

منه السرعة الخطية للجسيم B_1 :

$$V_{B_1} = V_A.\cos a = 30w_0(4/5) = 24w_0 \text{ cm/sec}$$

والسرعة النسبية للجسيم B_1 بالنسبة للجسيم A :

$$V_{B_1/A} = V_A.\sin a = 30w_0(3/5) = 18w_0 \text{ cm/sec}$$

بالتالي السرعة الزاوية لذراع التوصيل تساوي:

$$w_{AD} = w_2 = \frac{V_{B_1/A}}{AB} = \frac{18}{50}w_0 = 0.36w_0 \quad \text{rad/sec}$$

واتجاهها باتجاه دوران السرعة $\boldsymbol{V_{B_1/A}}$ حول A .

دراسة التسارع:

المرفق OA يتحرك حركة دورانية منتظمة منه:

$$A_A = A_A^n = w_1^2.OA = 30\,w_0^2 \text{ cm/sec}^2$$

ويتجه من A إلى O كما هو مبين في (الشكل-6-14).

أما ذراع التوصيل AD فيتحرك حركة مستوية عامة، منه نحسب تسارع الجسيم B_1 باختيار A قطب، ومنه:

$$\boldsymbol{A_{B_1}} = \boldsymbol{A_A} + \boldsymbol{A_{B_1/A}} = \boldsymbol{A_A^n} + \boldsymbol{A_{B_1/A}^n} + \boldsymbol{A_{B_1/A}^\tau} \qquad (1)$$

حيث مركبة التسارع النسبي الناظمية $\boldsymbol{A_{B_1/A}^n}$ تساوي إلى:

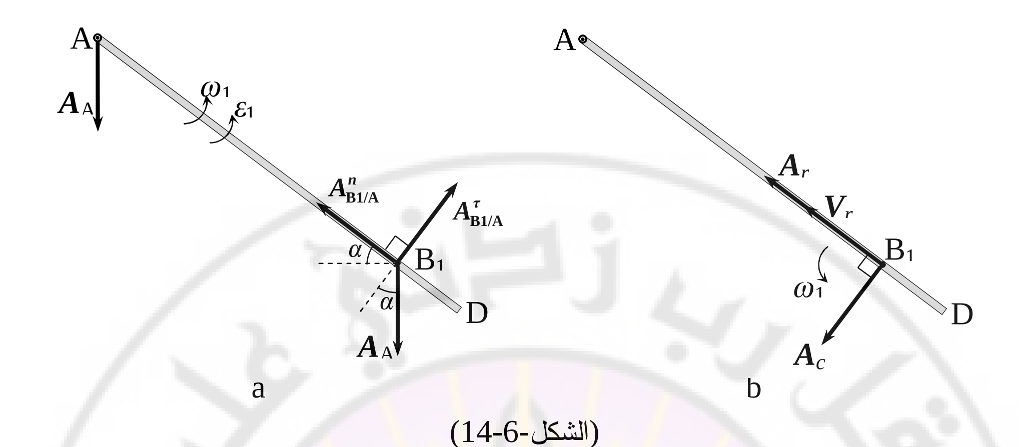
$$A_{B_1/A}^n = w_2^2.AB_1 = (0.36)^2\,w_0^2.50 = 6.48\,w_0^2 \text{ cm/sec}^2$$

وتتجه من B_1 إلى A كما هو مبين في (الشكل-6-14a).

ومركبة التسارع النسبية المماسية $\boldsymbol{A_{B_1/A}^t}$ تتناسب مع التسارع الزاوي لذراع التوصيل ε_2 ، لذا نفرضها باتجاه دوران ω_2 ، ومنه:

$$A_{B_1/A}^t = e_2.AB_1$$

بما أن علاقة التسارع (1) الموضح متجهاتها في (الشكل-6-14a) تحوي ثلاثة مجاهيل ممثلة بقيمة التسارع $\boldsymbol{A_{B_1}}$ ومنحاه، وقيمة مركبة التسارع النسبي المماسية $\boldsymbol{A_{B_1/A}^t}$ ، بالتالي لا يمكن حلها بطريقة الإسقاط، أو بطريقة مضلع التسارعات.



(الشكل-6-14)

لذا نفرض أن حركة B_1 هي حركة مركبة من:

حركة الجسيم B_1 وهو مقيد بالمنزلقة B وتمثل الحركة المكتسبة له، وهي حركة دائرية حول B مركز دوران لمنزلقة، بالتالي السرعة المكتسبة للجسيم B_1 المنطبق دوماً على B تساوي سرعة مركز الدوران B المعدومة.

وحركة الجسيم B_1 بالنسبة للمنزلقة وتمثل الحركة النسبية له، وهي حركة مستقيمة باتجاه المنزلقة وسرعته في هذه اللحظة تتجه وفق ذراع التوصيل B_1A ، وتساوي:

$$V_r = V_{B_1} = 24w_0 \text{ cm/sec}$$

منه السرعة المطلقة للجسيم B_1 تساوي:

$$\boldsymbol{V_a} = \boldsymbol{V_e} + \boldsymbol{V_r} = \boldsymbol{V_r} \quad \Rightarrow \quad V_a = V_{B_1}$$

وهذا ما حصلنا عليه في حساب السرعة.

أما علاقة التسارع المطلق للجسيم B_1 في الحركة المركبة فيعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{A_a} = \boldsymbol{A_e} + \boldsymbol{A_r} + \boldsymbol{A_c} \qquad (2)$$

حيث التسارع المكتسب A_e معدوم لأنه يساوي تسارع B مركز دوران المنزلقة الثابت.

والتسارع النسبي A_r فهو مجهول واتجاهه هو باتجاه ذراع التوصيل كما في(الشكل-6-14b).

أما تسارع كوريوليس A_c فيساوي:

$$A_c = 2w_e.V_r = 2w_2.V_{B_1} = 2\times 0.36\, w_0 \times 24\, w_0 = 17.28\, w_0^2 \text{ cm/sec}^2$$

بالتالي من علاقتي التسارع (1) و (2) نحصل على العلاقة التالية:

$$\boldsymbol{A^n_A} + \boldsymbol{A^n_{B_1/A}} + \boldsymbol{A^\tau_{B_1/A}} = \boldsymbol{A_r} + \boldsymbol{A_c}$$

نسقط طرفي العلاقة وفق الأشكال المناسبة لها في (الشكل-6-14) على محورين متعامدين، محور ذراع التوصيل ومحور عمودي عليه:

$$-A^{t}_{B_1/A} + A_A .\cos a = A_c$$

$$A^{n}_{B_1/A} - A_A .\sin a = A_r$$

فمن علاقة الإسقاط الأولى نحصل على:

$$A^{t}_{B_1/A} = A_A .\cos a - A_c = 30 w_0^2 (4/5) - 17.28 w_0^2 = 6.72 w_0^2 \text{ cm/sec}^2$$

الإشارة الموجبة تدل على أن اتجاه $\boldsymbol{A^{t}_{B_1/A}}$ المفروض هو صحيح، منه يمكن حساب التسارع الزاوي ε_2 لذراع التوصيل AD :

$$e_2 = (A^{t}_{B_1/A}) / \text{AB} = 6.72 w_0^2 / 50 = 0.1344 w_0^2 \text{ rad/sec}^2$$

ومن علاقة الإسقاط الثانية نحصل على:

$$\boldsymbol{A_r} = \boldsymbol{A^{n}_{B_1/A}} - \boldsymbol{A}_A .\sin a = 6.48 w_0^2 - 30 w_0^2 (3/5) = -11.52 w_0^2 \text{ cm/sec}^2$$

الإشارة السالبة تدل على أن اتجاه A_r معاكس للاتجاه المفروض.

بالتعويض في علاقة التسارع (2) نحصل على:

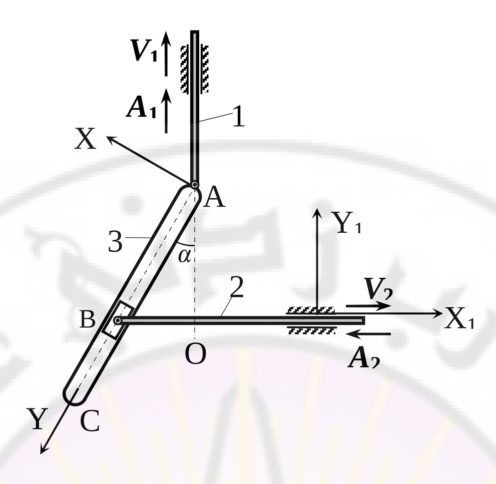
$$A_a = A_{B_1} = (A_c^2 + A_r^2)^{1/2} = w_0^2 [(17.28)^2 + (11.52)^2]^{1/2} = 20.77 w_0^2 \text{ cm/sec}^2$$

مسألة 6-6-6

تتحرك الوصلة 1 في التركيبة الآلية المبينة في (الشكل-6-15)، حركة متسارعة نحو الأعلى، ففي الوضع الموافق لـــ ($\alpha = 30°$) كان (OB = 3 cm)، وكانت سرعة الوصلة 1 تساوي ($V_1 = \sqrt{3}$ cm/sec)، وتسارعها يساوي ($A_1 = \sqrt{3}$ cm/sec^2)، وكانت سرعة الوصلة 2 تساوي (V_2=5 cm/sec)، وتسارعها يساوي (A_2=1 cm/sec^2).

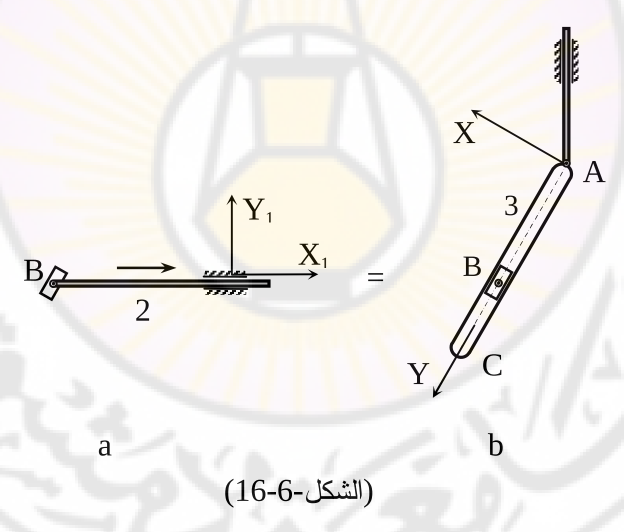
المطلوب: اشرح حركة المنزلقة B ، وأوجد مميزات حركتها، وحركة الذراع المشقوق AC .

الحل:



(الشكل-6-15)

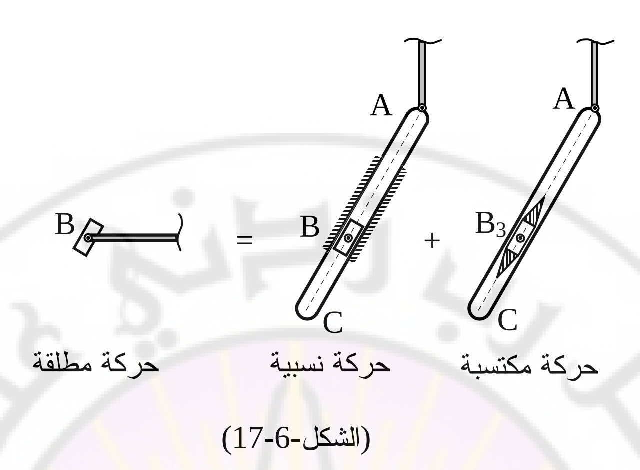
يمكن دراسة حركة المنزلقة B الموضحة في (الشكل-6-16)، كما يلي:



(الشكل-6-16)

بما أن المنزلقة B جسيم متمفصل مع الوصلة 2 ، الذي يتحرك حركة انسحابية بدلالة جملة المحاور الثابتة X_1Y_1 ، كما هو مبين في (الشكل-6-16a)، هذه الحركة تمثل الحركة المطلقة للمنزلقة B .

وبما أن المنزلقة B جسيم يتحرك داخل الذراع المشقوق 3 المقيد بجملة المحاور XY ، الذي يتحرك بدوره حركة مستوية عامة كما هو مبين في (الشكل-6-16b)، هذه الحركة هي حركة مركبة من مجموع حركتين كما هو مبين في (الشكل-6-17)، هما:



(الشكل-6-17)

حركة المنزلقة B وهي مقيدة بالذراع المشقوق 3 ، الذي يتحرك حركة مستوية عامة بالنسبة لمجموعة المحاور الثابتة $O_1X_1Y_1$ ، تمثل الحركة المكتسبة لها، كما هو مبين في (الشكل-6-17)، والتي تكافئ حركة تلك النقطة B_3 من الذراع المشقوق التي تنطبق عليها المنزلقة B لحظة الدراسة.

وحركة المنزلقة B بالنسبة للذراع المشقوق 3 ، أي بالنسبة لمجموعة المحاور المتحركة XY تمثل الحركة النسبية لها، كما هو مبين في (الشكل-6-17)، وهي حركة مستقيمة على طول المحور Y .

تعطى سرعة المنزلقة B بالعلاقة:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}a} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{B}e} + \boldsymbol{V}_{\mathbf{B}r}$$

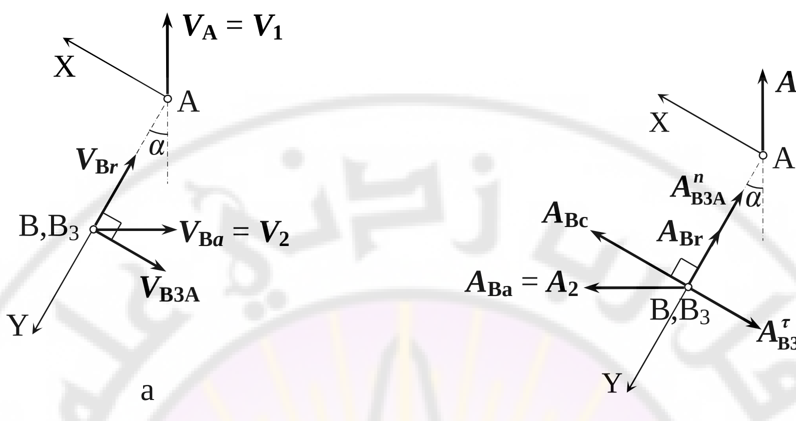
حيث السرعة المطلقة للمنزلقة $\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}a}$ محمولة على المستقيم OB ، وتساوي:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}a} = \boldsymbol{V}_2$$

والسرعة المكتسبة للمنزلقة $\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}e}$ تساوي سرعة النقطة B_3 من الذراع المشقوق التي تنطبق عليها المنزلقة B لحظة الدراسة، وبما أن حركة الذراع المشقوق 3 هي حركة مستوية عامة، وبفرض الطرف A قطباً، بالتالي تعطى السرعة المكتسبة للمنزلقة بالعلاقة:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}e} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{A}} + \boldsymbol{V}_{\mathbf{B}_3\mathbf{A}} = \boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_{\mathbf{B}_3\mathbf{A}}$$

ويفرض اتجاه السرعة $\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}_3\mathbf{A}}$ كما هو مبين في (الشكل-6-18a)



(الشكل-6-18)

والسرعة النسبية للمنزلقة V_{Br} محمولة على المستقيم BA ، ويفرض اتجاهها نحو الأعلى كما هو مبين في (الشكل-6-18a).

بالتعويض في علاقة سرعة المنزلقة:

$$\boldsymbol{V_2} = \boldsymbol{V_{Br}} + \boldsymbol{V_1} + \boldsymbol{V_{B_3A}}$$

بإسقاط هذه العلاقة على المحور X نجد:

$$-V_2 . \cos a = V_1 . \sin a - V_{B_3A}$$

منه:

$$V_{B_3A} = V_2 . \cos a + V_1 . \sin a = 3\sqrt{3} \text{ cm/sec}$$

وعلى المحور Y نجد:

$$-V_2 . \sin a = -V_{Br} - V_1 . \cos a$$

منه:

$$V_{Br} = V_2 . \sin a - V_1 . \cos a = 1 \text{ cm/sec}$$

إن القيمة الموجبة لـــ V_{B_3A} و V_{Br} تدل على أن اتجاههما المفروض في الشكل صحيح.

وبمعرفة السرعة V_{B_3A} نحسب السرعة الزاوية للذراع المشقوق:

$$w_3 = w_e = V_{B_3A} / \text{AB} = \sqrt{3}/2 \text{ rad/sec}$$

ويكون متجه السرعة الزاوية $\boldsymbol{\Omega_e}$ عمودياً على مستوي الشكل، ويتجه إلى جهة القارئ.

ويعطى تسارع المنزلقة B بالعلاقة:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{B}a} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{B}e} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{B}r} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{B}c}$$

حيث التسارع المطلق للزالقة $\boldsymbol{A}_{\mathbf{B}a}$ محمول على المستقيم OB ، ويساوي:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{B}a} = \boldsymbol{A}_2$$

والتسارع المكتسب للمنزلقة $\boldsymbol{A}_{\mathbf{B}e}$ يساوي تسارع تلك النقطة من الذراع المشقوق التي تنطبق عليها المنزلقة B لحظة الدراسة، وبما أن حركة الذراع المشقوق 3 كما ذكرنا هي حركة مستوية عامة، وبفرض الطرف A قطباً، بالتالي يعطى التسارع المكتسب للمنزلقة بالعلاقة:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{B}e} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{A}} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{B}_3\mathbf{A}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{A}} + \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}}_{\mathbf{B}_3\mathbf{A}} + \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{B}_3\mathbf{A}}$$

حيث تسارع القطب A يساوي:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{A}} = \boldsymbol{A}_1$$

أما المركبة الناظمية $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}}_{\mathbf{B}_3\mathbf{A}}$ لتسارع B_3 بالنسبة لـــ A ، فإنه يتجه من B_3 إلى A وقيمته العددية:

$$A^{n}_{\mathrm{B_3A}} = \mathrm{AB}.w_e^2 = 4.5\,\mathrm{cm/sec^2}$$

أما المركبة المماسية $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{B}_3\mathbf{A}}$ لتسارع B_3 بالنسبة لـــ A ، فيفرض اتجاهها كما هو مبين في (الشكل-6-18b).

والتسارع النسبي للزالقة $\boldsymbol{A}_{\mathbf{B}r}$ محمول على المستقيم BA ، ويفرض اتجاهه نحو الأعلى، من B إلى A كما هو مبين في (الشكل-6-18b).

أما تسارع كوريوليس فيعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{B}c} = 2\boldsymbol{\Omega}_e \wedge \boldsymbol{V}_{\mathbf{B}r}$$

وقيمته العددية:

$$A_{\mathrm{B}c} = 2w_e\,.V_{\mathrm{B}r}.\sin 90 = \sqrt{3}\ \mathrm{cm/sec^2}$$

ويتجه كما هو مبين في (الشكل-6-18b).

بالتعويض في علاقة تسارع المنزلقة:

$$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_{\mathbf{B}r} + \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}^{n}_{\mathbf{B_3A}} + \boldsymbol{A}^{\tau}_{\mathbf{B_3A}} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{B}c}$$

بإسقاط هذه العلاقة على المحور Y نجد:

$$A_2 .\sin a = -A_1 .\cos a - A^{n}_{\mathrm{B_3A}} - A_{\mathrm{B}r}$$

منه:

$$A_{\mathrm{B}r} = -A_1 .\cos a - A^{n}_{\mathrm{B_3A}} - A_2 .\sin a = -6.5\ \mathrm{cm/sec}^2$$

الإشارة السالبة تدل على أن الاتجاه الصحيح لـــ $\boldsymbol{A}_{\mathbf{B}r}$ هو عكس الاتجاه المفروض، أي أنها باتجاه معاكس لاتجاه السعة النسبية للمنزلقة $\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}r}$.

وبإسقاط العلاقة على المحور X نجد:

$$A_2 .\cos a = A_1 .\sin a - A^{t}_{\mathrm{B_3A}} + A_{\mathrm{B}c}$$

ومنه:

$$A^{t}_{\mathrm{B_3A}} = A_1 .\sin a + A_{\mathrm{B}c} - A_2 .\cos a = \sqrt{3}\ \mathrm{cm/sec}^2$$

وبمعرفة $A^{t}_{\mathrm{B_3A}}$ نحسب التسارع الزاوي للذراع المشقوق:

$$e_3 = e_e = A^{t}_{\mathrm{B_3A}} / \mathrm{AB} = \sqrt{3}/6\ \mathrm{rad/sec}^2$$

ويكون متجه التسارع الزاوي $\boldsymbol{E_e}$ عمودياً على مستوي الشكل، ويتجه إلى جهة القارئ.

إن القيمة الموجبة لمركبة التسارع $A^{\tau}_{\mathrm{B_3A}}$ تدل على أن اتجاهه المفروض على الرسم صحيح، وحركة الذراع المشقوق في اللحظة المعطاة هي دورانية متسارعة وذلك لأن $\boldsymbol{A}^{t}_{\mathbf{B_3A}}$ و $\boldsymbol{V}_{\mathbf{BA}}$ ذات اتجاه واحد، يضاف إلى ذلك أن $\boldsymbol{\Omega_e}$ و $\boldsymbol{E_e}$ ذات اتجاه واحد، كما أن المنزلقة B تتحرك في الذراع المشقوق حركة مستقيمة متباطئة لأن الحركة النسبية هي حركة مستقيمة، ومتجه السرعة النسبية له $\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}r}$ يعاكس متجه التسارع النسبي $\boldsymbol{A}_{\mathbf{B}r}$.

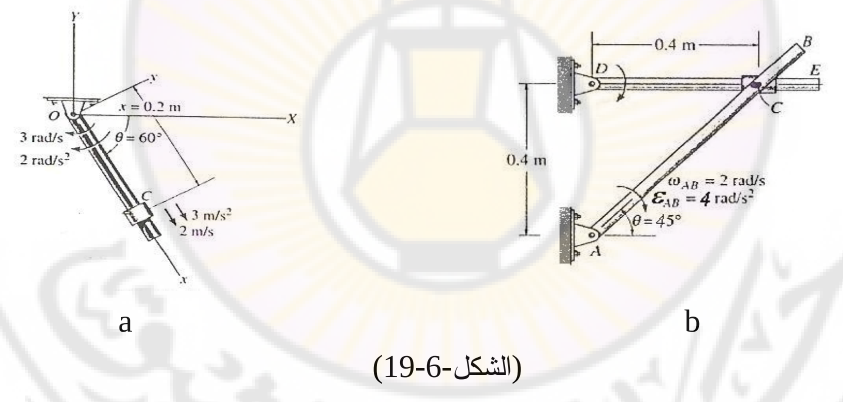
مسائل غير محلولة PROBLEMS

مسألة - 1

تتحرك الزالقة C على امتداد الذراع OB في التركيبة الآلية الموضحة في (الشكل-6-19a)، ففي اللحظة الموافقة لـ ($\theta = 60°$)، تكون الزالقة قد قطعت مسافة مقدارها ($x = 0.2$ m) بسرعة 2 m/sec ، وتسارع 3 m/sec^2 ، وكلاهما مقاس بالنسبة للذراع خلال دورانه بسرعة زاوية مقدارها ($\omega = 3$ rad/sec)، وبتسارع زاوي مقداره ($\varepsilon = 2 \text{ rad/sec}^2$) حسب الاتجاهات الموضحة في الشكل. المطلوب في هذا الوضع ما يلي:

1. شرح حركة المنزلقة.
2. دراسة حركة التركيبة.

الجواب: $A_C = 12.46 \text{ m/sec}^2$, $V_C = 2.1$ m/sec , $A_{cor} = 12 \text{ m/sec}^2$



(الشكل-6-19)

مسألة - 2

تحتوي التركيبة الآلية الموضحة في (الشكل-6-19b)، على منزلقة مثبتة بواسطة مسمار (*Pin-Connected*) بالذراع AB ، وقابلة للانزلاق على الذراع DE ، ففي اللحظة الموافقة لـ ($\theta = 45°$) كان الذراع AB يدور باتجاه دوران عقارب الساعة (*Clockwise*) بسرعة زاوية مقدارها ($\omega_{AB} = 2$ rad/sec)، وبتسارع زاوي مقداره ($\varepsilon_{AB} = 4 \text{ rad/sec}^2$). المطلوب في هذا الوضع ما يلي:

1. شرح حركة المنزلقة.
2. دراسة حركة التركيبة.

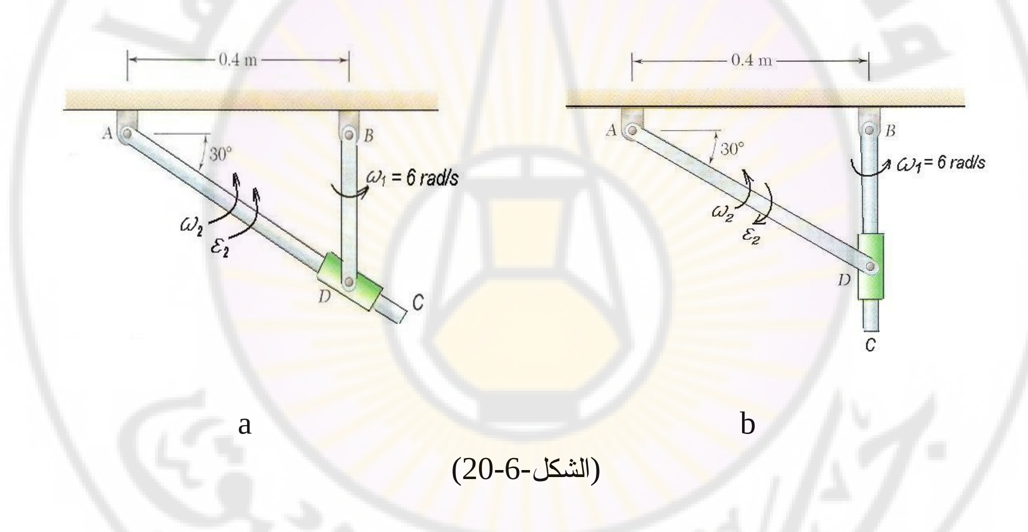
الجواب: $\varepsilon_{DE} = 5 \text{ rad/sec}^2$ - CCW , $\omega_{DE} = 3$ rad/sec - CW

مسألة - 3

يدور الذراع BD في التركيبة الآلية الموضحة في (الشكل-6-20a)، بعكس دوران عقارب الساعة بسرعة زاوية ثابتة مقدارها ($\omega_1 = 6$ rad/sec)، ممـــا يؤدي إلى تدوير الذراع AC من خلال المنزلقة D المثبتة بالذراع BD . المطلوب عند الوضع الموضح في الشكل ما يلي:

1. شرح حركة المنزلقة.
2. دراسة حركة التركيبة.

الجواب: $\varepsilon_2 = 7.79$ rad/sec^2 , $\omega_2 = 1.5$ rad/sec



a b

(الشكل-6-20)

مسألة - 4

يدور الذراع BC في التركيبة الآلية الموضحة في (الشكل-6-20b)، بعكس دوران عقارب الساعة بسرعة زاوية ثابتة مقدارها ($\omega_1 = 6$ rad/sec)، ممـــا يؤدي إلى تدوير الذراع AD من خلال الكتلة المنزلقة D المثبتة بالذراع AD . المطلوب عند الوضع الموضح في الشكل ما يلي:

1. شرح حركة المنزلقة.
2. دراسة حركة التركيبة عند الوضع الموضح في الشكل.

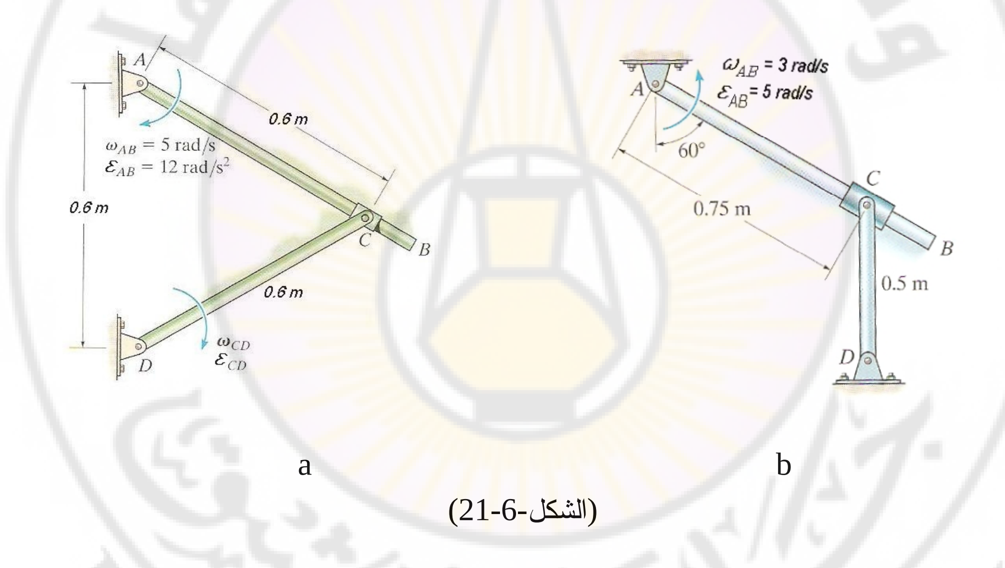
الجواب: $\varepsilon_2 = 62.4$ rad/s^2 , $\omega_2 = 6$ rad/sec

مسألة - 5

في لحظة معينة من الحركة يدور الذراع AB في التركيبة الآلية الموضحة في (الشكل-6-21a)، بسرعة زاوية مقدارها ($\omega_{AB} = 5 \ \text{rad/sec}$)، وبتسارع زاوي مقداره ($\varepsilon_{AB} = 12 \ \text{rad/sec}^2$)، وكلاهما باتجاه دوران عقارب الساعة، ممـــا يؤدي إلى تدوير الذراع CD من خلال المنزلقة C المثبتة به. المطلوب في هذه اللحظة ما يلي:

1. شرح حركة المنزلقة.
2. دراسة حركة التركيبة.

الجواب: $\omega_{CD} = 10 \ \text{rad/sec - CW} \quad , \quad \varepsilon_{CD} = 24 \ \text{rad/sec}^2 \text{ - CW}$



(الشكل-6-21)

مسألة - 6

في لحظة معينة من الحركة يدور الذراع AB في التركيبة الآلية الموضحة في (الشكل-6-21b)، بسرعة زاوية مقدارها ($\omega_{AB} = 3 \ \text{rad/sec}$)، وبتسارع زاوي مقداره ($\varepsilon_{AB} = 5 \ \text{rad/sec}^2$)، وكلاهما باتجاه عكس دوران عقارب الساعة، ممـــا يؤدي إلى تدوير الذراع CD من خلال المنزلقة C المثبتة به. المطلوب في هذه اللحظة ما يلي:

1. شرح حركة المنزلقة.
2. دراسة حركة التركيبة.

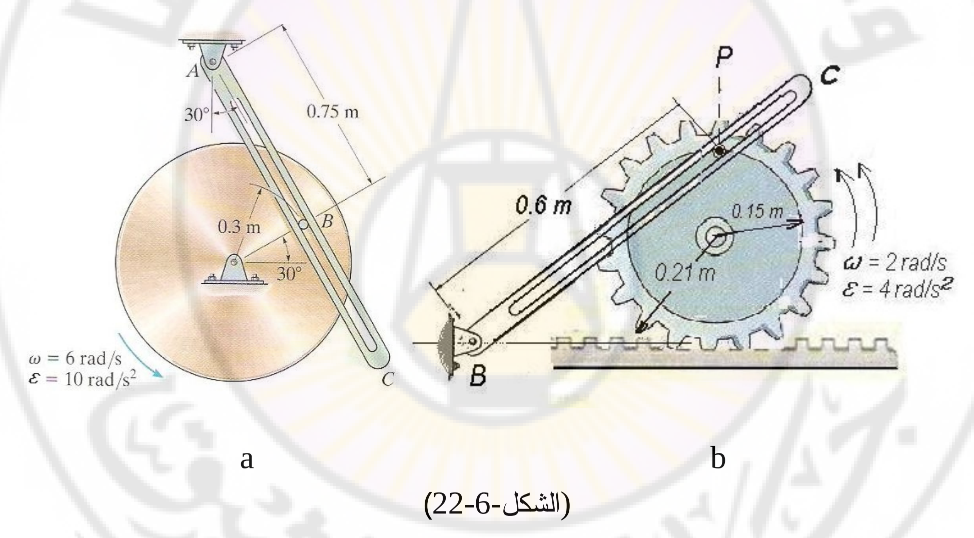
الجواب: $\omega_{CD} = 9 \ \text{rad/sec - CW} \quad , \quad V_C = 4.5 \ \text{m/sec}$

مسألة - 7

يدور القرص الموضح في (الشكل-6-22a) بعكس دوران عقارب الساعة بسرعة زاوية مقدارها ($\omega = 6 \ \ rad/sec$)، وبتسارع زاوي مقداره ($\varepsilon = 10 \ \ rad/sec^2$)، ممـــا يؤدي إلى تدوير الذراع المشقوق AC من خلال الإسفين (*Peg*) B المثبت بالقرص. المطلوب عند الوضع الموضح بالشكل ما يلي:

1. شرح حركة الاسفين.
2. دراسة حركة التركيبة.

الجواب: $\omega_{AC} = 0 \quad , \quad \varepsilon_{AC} = 14.4 \ \ rad/sec^2$ - CW



a b

(الشكل-6-22)

مسألة - 8

خلال فترة محددة من الحركة، يتدحرج المسنن الدائري الموضح في (الشكل-6-22b) على المسنن المستقيم السفلي، مما يؤدي إلى دوران الذراع المشقوق BC حول المفصل B من خلال إسفين (*Peg*) P مثبت على المسنن الدائري. المطلوب عند الوضع الموضح بالشكل ما يلي:

1. شرح حركة الإسفين.
2. دراسة حركة التركيبة.

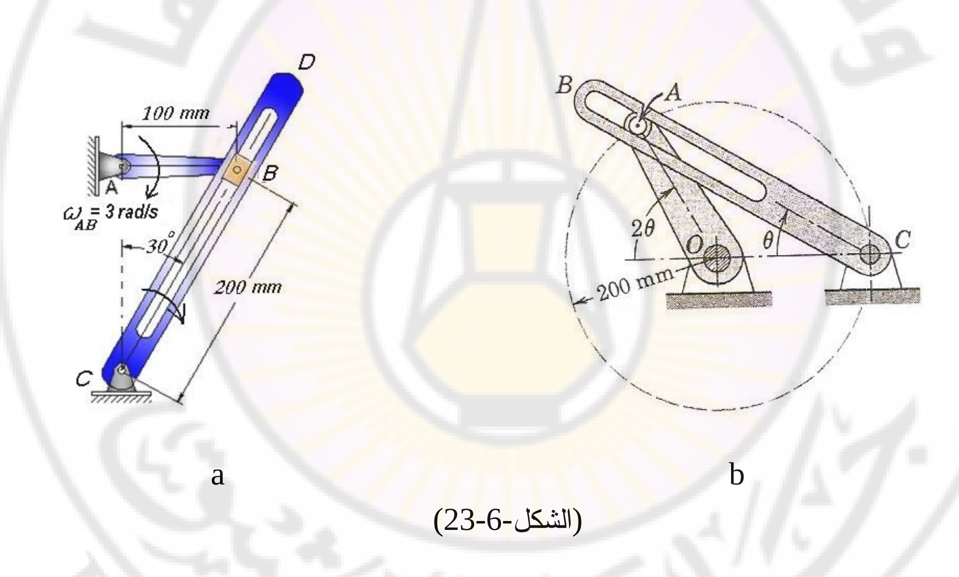
الجواب: $\omega_{BC} = 0.72 \ \ rad/sec$ – CCW , $\varepsilon_{BC} = 2.02 \ \ rad/sec^2$ - CCW

مسألة - 9

يدور الذراع AB في التركيبة الآلية الموضحة في (الشكل-6-23a)، وفق اتجاه دوران عقارب الساعة بسرعة زاوية ثابتة مقدارها ($\omega_{AB} = 3$ rad/sec)، ممـــا يؤدي إلى تدوير الذراع المشقوق CD من خلال المنزلقة B المثبتة بالذراع AB . المطلوب عند الوضع الموضح بالشكل ما يلي:

1. شرح حركة المنزلقة.
2. دراسة حركة التركيبة.

الجواب : $\varepsilon_{CD} = 1.95$ rad/sec^2 - CW , $\omega_{CD} = 0.75$ rad/sec - CW



a b

(الشكل-6-23)

مسألة - 10

خلال فترة معينة من الحركة يدور عمود المرفق OA في التركيبة الآلية الموضحة في (الشكل-6-23b)، بسرعة زاوية ثابتة ($\omega_{OA} = 10$ rad/sec)، باتجاه دوران عقارب الساعة. ممـــا يؤدي إلى تدوير الذراع المشقوق BC من خلال الإسفين (*Peg*) A المثبت بالمرفق. المطلوب عند الوضع الموضح بالشكل ما يلي:

1. شرح حركة الإسفين.
2. دراسة حركة التركيبة.

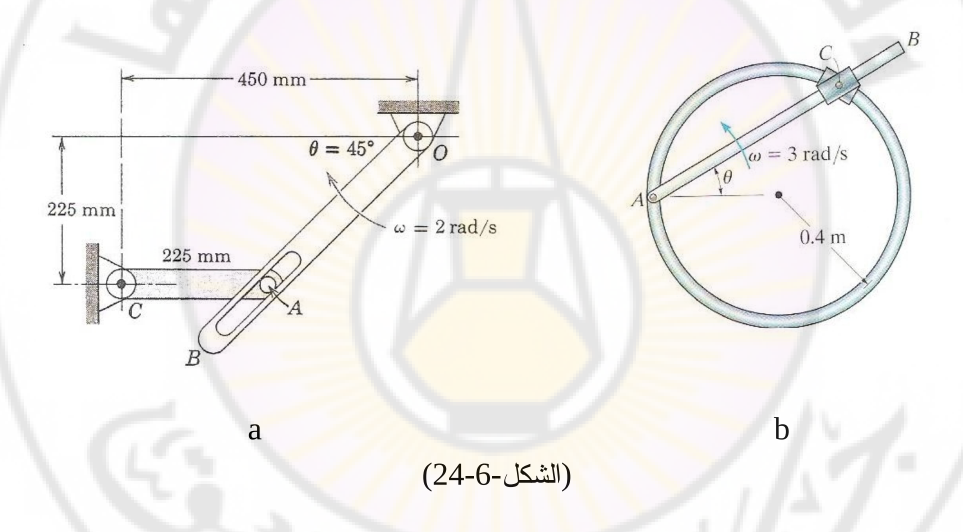
الجواب: $A_r = 8.66$ m/sec^2 , $\omega_{BC} = 5$ rad/sec - CW

مسألة - 11

يعشق المسمار A (*Pin*) المثبت في نهاية الذراع AC ، في مجرى الذراع المشقوق OB كما هو مبين في (الشكل-6-24a)، فإذا دار الذراع المشقوق OB بسرعة زاوية منتظمة تساوي (ω_{OB} = 2 rad/sec) وباتجاه دوران عقارب الساعة. المطلوب عندما ($\theta = 45°$) . ما يلي:

1. شرح حركة المسمار.
2. دراسة حركة التركيبة.

الجواب: ω_{AC} = 0.72 rad/sec – CCW , ε_{AC} = 32 rad/sec^2 - CW



a b

(الشكل-6-24)

مسألة - 12

يرتبط جسما المنزلقة معاً في النقطة C ، حيث تكون حركة أحدهما في مسار دائري نصف قطره 0.4 m ، بينما ينزلق الجسم الثاني على امتداد الذراع AB ، الذي يدور بسرعة زاوية ثابتة تساوي (ω_{AB} = 3 rad/sec) في الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة (*Counterclockwise*)، كما هو مبين في (الشكل-6-24b)، المطلوب في الوضع الموافق لــ ($\theta = 45°$) ما يلي:

1. شرح حركة الجسم الثاني من المنزلقة.
2. دراسة حركة التركيبة.

الجواب: V_C = 2.4 m/sec , A_C = 14.4 m/sec^2

الفصل السابع

الحركة المحصلة للجسم الصلب *Resultant Motion of a Rigid Body*

1- تعريف الحركة المحصلة

إذا تحرك جسم مادي S بدلالة جملة إحداثية $T(OXYZ)$ ، وتحركت الجملة T بدلالة جملة إحداثية أخرى $T_I(O_1X_1Y_1Z_1)$ نعدها ثابتة، فإن حركة الجسم S بدلالة الجملة T_1 هي الحركة المركبة للجسم، أو الحركة المحصلة للجسم.

ونعني بتعيين الحركة المركبة للجسم الصلب S بدلالة الجملة الثابتة T_1 ، تحديد السرعة المطلقة لكل جسيم M من جسيمات الجسم الصلب المعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{V}_a = \boldsymbol{V}_e + \boldsymbol{V}_r$$

والتسارع المطلق لكل جسيم M من جسيمات الجسم الصلب المعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{A}_a = \boldsymbol{A}_e + \boldsymbol{A}_r + \boldsymbol{A}_c$$

بالتالي يتطلب إيجاد الارتباط بين مميزات الحركات النسبية والمكتسبة والمطلقة، وبما أن السرعات والتسارعات الخطية والزاوية تعد من أهم مميزات الحركة لحركة الجسم الصلب، ومنه سنكتفي بتعيين الارتباط بين السرعتين الخطية والزاوية للحركة فحسب.

2- تركيب حركتين انسحابيتين

يتحرك الجسم S حركة انسحابية بدلالة الجملة T ، التي تتحرك بدورها بدلالة الجملة الثابتة T_1 حركة انسحابية أخرى، في هذه الحالة تكون الحركة النسبية حركة انسحابية سرعتها $\boldsymbol{V}_r$ والسرعة النسبية للجسيمات M كلها مسايرة، كذلك تكون الحركة المكتسبة حركة انسحابية والسرعة المكتسبة لها أيضاً مسايرة، وتساير سرعة القطب O في الجملة T ، أي:

$$\boldsymbol{V}_e = \boldsymbol{V}_{\mathrm{O}}$$

والحركة المركبة للجسم S تكون حركة انسحابية، والسرعة المطلقة $\boldsymbol{V}_a$ للجسيم M من الجسم S هي محصلة السرعتين:

$$\boldsymbol{V}_a = \boldsymbol{V}_e + \boldsymbol{V}_r$$

وهي تنطبق على قطر متوازي الأضلاع المرسوم على السرعتين.

ويكفي لدراسة توزع السرعة في الجسم S ، أن نعين السرعة المطلقة لجسيم واحد M من هذا الجسم، وتكون سرع باقي الجسيمات مسايرة لها، وتؤول حركة الجسم الصلب إلى دراسة حركة جسيم مادي ما M في هذا الجسم، وما قيل عن توزع السرعة ينطبق أيضاً في هذه الحالة على توزع التسارعات في الجسم S ، حيث التسارعات مسايرة وتساوي:

$$\boldsymbol{A_a} = \boldsymbol{A_e} + \boldsymbol{A_r}$$

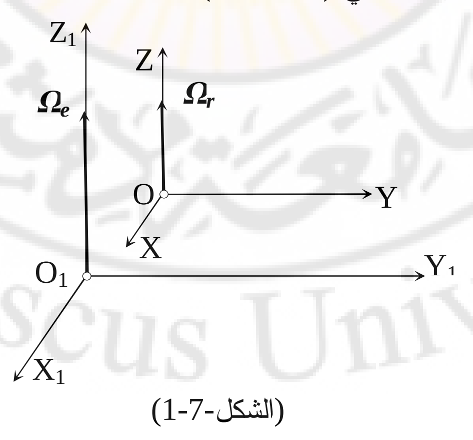
لأن التسارع المتمم $\boldsymbol{A_c}$ معدوم لانعدام دوران الجملة المتحركة T حول الجملة الثابتة T_1 ، لأن حركة الجملة المتحركة T انسحابية حول الجملة الثابتة T_1 .

3- تركيب حركتين دورانيتين

عندما يدور الجسم S حول محور ثابت في الجملة المتحركة T ، وتدور هذه الجملة بدورها حول محور ثابت في الجملة الثابتة T_1 ، بالتالي نميز الحالتين:

3-1- توازي محوري الدوران

نعد متجه محور الدوران النسبي $\boldsymbol{\Omega_r}$ منطبقاً على OZ ، ومتجه محور الدوران المكتسب $\boldsymbol{\Omega_e}$ الثابت منطبقاً على O_1Z_1 ، نوجه O_1Z_1 في اتجاه الدوران $\boldsymbol{\Omega_e}$ ، ونوجه OZ في جهة O_1Z_1 ، بالتالي يتجه $\boldsymbol{\Omega_r}$ في اتجاه OZ ، إذا كان اتجاهه مماثلاً لــ $\boldsymbol{\Omega_e}$ والعكس بالعكس، كما هو مبين في (الشكل-7-1).



(الشكل-7-1)

لدينا:

$$\boldsymbol{\Omega_r} = w_r\,.\boldsymbol{k} \qquad , \qquad \boldsymbol{\Omega_e} = w_e\,.\boldsymbol{k_1} \qquad (1\text{-}7)$$

حيث ω_r و ω_e القيم العددية لمتجهي السرعة الزاوية لـــ $\boldsymbol{\Omega_r}$ و $\boldsymbol{\Omega_e}$ ، وبما أن $(\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k_1})$، ومنه:

$$\boldsymbol{\Omega_r} = \frac{w_r}{w_e}\,\boldsymbol{\Omega_e} \tag{2-7}$$

وكما في الفرض أن ($\omega_e > 0$) و ω_r يمكن أن يكون موجباً أو سالباً حسبما يكون دوران S حول OZ مماثلاً أو معاكساً لدوران الجملة T حول O_1Z_1 .

نفترض في لحظة t جسيماً M من الجسم الصلب S ، حيث السرعة النسبية للجسيم M هي:

$$\boldsymbol{V_r} = \boldsymbol{\Omega_r} \wedge \mathbf{OM} = \frac{w_r}{w_e}\,\boldsymbol{\Omega_e} \wedge \mathbf{OM}$$

والسرعة المكتسبة للجسيم M هي:

$$\boldsymbol{V_e} = \boldsymbol{\Omega_e} \wedge \mathbf{O_1M}$$

فتكون السرعة المطلقة للجسيم M هي:

$$\boldsymbol{V_a} = \boldsymbol{V_e} + \boldsymbol{V_r} = \boldsymbol{\Omega_e} \wedge (\frac{w_r}{w_e}\mathbf{OM} + \mathbf{O_1M}) = \frac{1}{w_e}\,\boldsymbol{\Omega_e} \wedge (w_r\,.\mathbf{OM} + w_e\,.\mathbf{O_1M})$$

بالاستناد إلى العلاقة الثانية من (7-1):

$$\boldsymbol{V_a} = (w_r\,.\mathbf{MO} + w_e\,.\mathbf{MO_1}) \wedge \boldsymbol{k_1} \tag{3-7}$$

ونعلم من خواص مركز الثقل G للنقطتين O_1 و O ، أن:

$$w_r\,.\mathbf{MO} + w_e\,.\mathbf{MO_1} = (w_e + w_r)\mathbf{MG}$$

وتكتب عندها العلاقة (7-3):

$$\boldsymbol{V_a} = \mathbf{MG} \wedge (w_e + w_r)\boldsymbol{k}_1 \tag{4-7}$$

وتعني هذه العلاقة أنه إذا ما اشترك الجسم S في آن واحد، في حركتين دورانيتين في اتجاه واحد حول محورين متوازيين، فإن حركته المحصلة أو حركة الجسيم M تكون دوراناً لحظياً حول محور آني للدوران يوازي محور الدوران المفروضين، ويمر من المركز G الذي هو المركز الآني للدوران لأن ($\boldsymbol{V}_{\mathbf{G}} = 0$)، ومتجه السرعة الزاوية $\boldsymbol{\Omega}$ لمحور الدوران الآني يعين بالعلاقة:

$$\boldsymbol{\Omega} = (w_e + w_r)\boldsymbol{k}_1 \tag{5-7}$$

وقيمته العددية:

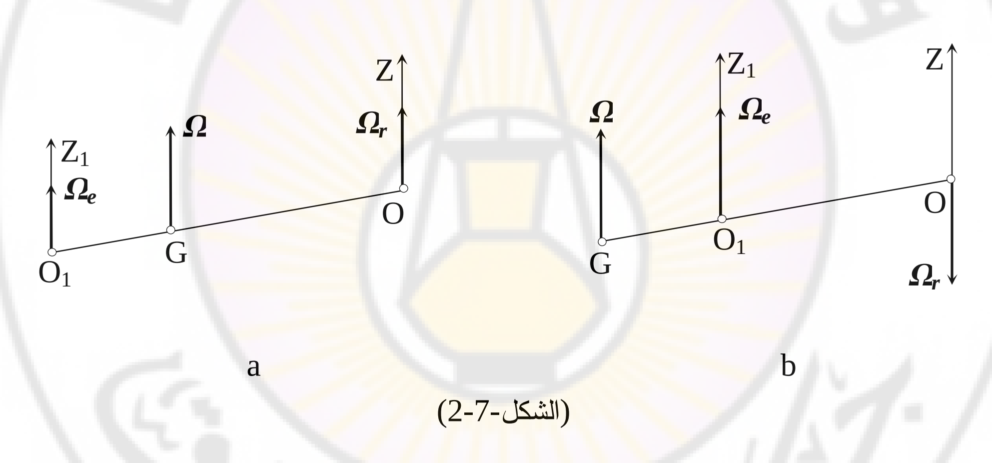
$$w = (w_e + w_r) \tag{6-7}$$

ومع مرور الزمن يغير المحور الآني للدوران موضعه، فيرسم عند ذلك سطحاً أسطوانياً قاعدته منحنٍ يرسمه المركز G المتحرك، الذي يمثل المركز الآني للدوران، ويقع على المستقيم OO_1 ، حيث:

$$\frac{GO_1}{GO} = \frac{w_r}{w_e} \tag{7-7}$$

وهذه النسبة هي جبرية بمعنى أن:

• المركز G يقع بين O_1 و O ، إذا اتفق $\boldsymbol{\Omega_e}$ و $\boldsymbol{\Omega_r}$ في الجهة، أي عندما ($\omega_r > 0$)، ويكون متجه محور الدوران الآني $\boldsymbol{\Omega}$ في اتجاهها، كما هو مبين في (الشكل-7-2a).



(الشكل-7-2)

• المركز G يقع على امتداد المستقيم O_1O ، وفي جهة السرعة الزاوية الأكبر، إذا تعاكس $\boldsymbol{\Omega_e}$ و $\boldsymbol{\Omega_r}$ في الجهة، أي عندما ($\omega_r < 0$)، ويكون متجه محور الدوران الآني $\boldsymbol{\Omega}$ في اتجاه الدوران الأكبر، كما هو مبين في (الشكل-7-2b).

حالات خاصة

- إذا كان متجها الدوران $\boldsymbol{\Omega_e}$ و $\boldsymbol{\Omega_r}$ ثوابتاً، عندئذ يرسم القطب O دائرة حول المحور $\boldsymbol{\Omega_e}$ مركزها O_1 ونصف قطرها O_1O ، ويرسم المركز G دائرة تحاكي الدائرة السابقة كما هو مبين في (الشكل-7-3)، مركزها O_1 ، ونسبة التحاكي هي:

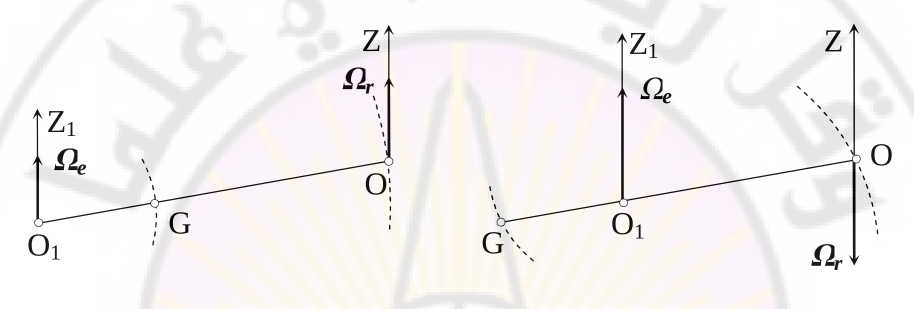
$$h = O_1G / O_1O$$

ومن خواص التناسب:

$$\frac{\mathrm{O_1G}}{\mathrm{O_1G - O_1O}} = \frac{\mathrm{O_1G}}{\mathrm{OG}} = \frac{h}{h-1} = -\frac{w_r}{w_e}$$

ومنه:

$$h = \frac{\mathrm{O_1G}}{\mathrm{O_1O}} = \frac{w_r}{w_r + w_e}$$



(الشكل-7-3)

- إذا كان متجها الدوران ($\Omega_e = \Omega_r$) متساويان، وكان اتجاه Ω_r في جهة Ω_e ، وقع عندها المركز الآني G في منتصف O_1O ، وكان:

$$w = 2w_e = 2w_r$$

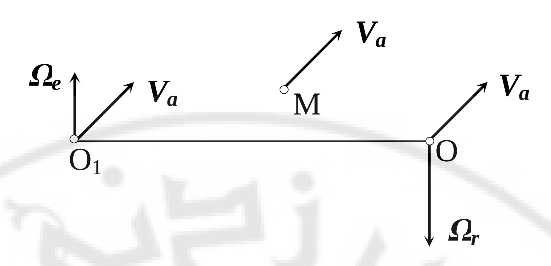
- إذا كان متجها الدوران ($\Omega_e = \Omega_r$) متساويان، وكان اتجاه Ω_r في جهة تخالف جهة Ω_e ، وقع عندها المركز الآني G في اللانهاية، وتسمى مجموعة الدوران هذه بازدواج الدوران. معنى ذلك أن المركز الآني للدوران غير موجود، ولا توجد سرع زاوية للدوران الآني ($\omega = 0$)، وتؤول الحركة المحصلة في هذه الحالة إلى حركة انسحابية.

يمكن تأكيد ما ذكر، بالعودة إلى العلاقة (7-3) بوضع ($\omega_r = -\omega_e$)، ينتج:

$$\boldsymbol{V_a} = (\mathbf{MO_1} - \mathbf{MO}) \wedge w_e\,.\boldsymbol{k_1}$$

$$\boldsymbol{V_a} = \mathbf{OO_1} \wedge \boldsymbol{\Omega_e} = \mathbf{O_1O} \wedge \boldsymbol{\Omega_r} \qquad (8\text{-}7)$$

تعني العلاقة الأخيرة أن $\boldsymbol{V_a}$ لا علاقة لها بوضع الجسيم M ، والسرع المطلقة لجسيمات الجسم المادي S كلها مسايرة، وتساوي عزم المتجه $\boldsymbol{\Omega_e}$ بالنسبة للقطب O ، أو عزم المتجه $\boldsymbol{\Omega_r}$ بالنسبة للقطب O_1 ، وهذا ما يمثل بعزم الازدواج للمتجهات $\boldsymbol{\Omega_e}$ و $\boldsymbol{\Omega_r}$ ، أو عزم ازدواج السرعات الزاوية كما هو مبين في (الشكل-7-4).

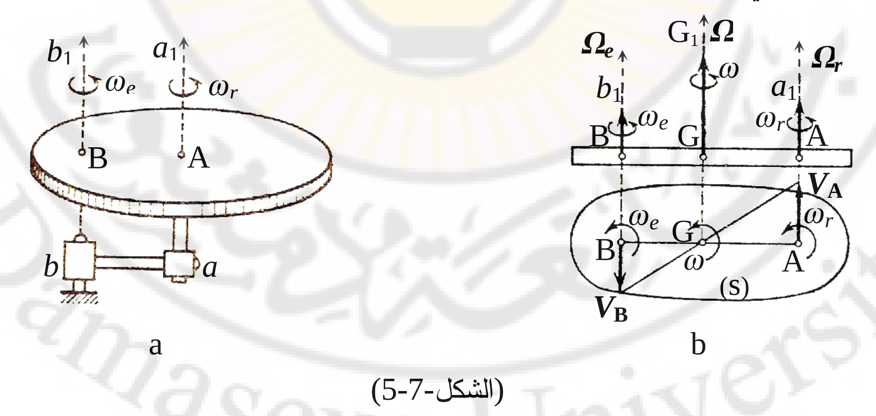


(الشكل-7-4)

بالتالي حركة الجسم S بالنسبة للجملة الثابتة T_1 هي في اللحظة t حركة انسحابية سرعتها $\boldsymbol{V_a}$ ، وكل انسحاب للجسم S حول الجملة ثابتة T_1 يمكن عده مركباً من دورانين متعاكسين، حيث يدور فيه الجسم حول محور ثابت في الجملة T ، التي تدور بدورها في اتجاه معاكس، وبذات السرعة الزاوية حول محور ثابت في الجملة T_1 .

تطبيق

يدور قرص حول المحور aa_1 بسرعة زاوية ω_r المثبت بالمرفق ab ، الذي يدور بحركة دورانية حول المحور bb_1 بسرعة زاوية ω_e ، والذي يوازي المحور aa_1 كما هو مبين في (الشكل-7-5a).



(الشكل-7-5)

لدراسة الحركة نميز الحالات التالية:

1. حالتا الدوران في اتجاه واحد.
2. حالتا الدوران في اتجاهين مختلفين.
3. حالتا الدوران في اتجاهين مختلفين ومتساويين بالقيمة العددية.

بما أن المحورين aa_1 و bb_1 متوازيان فإن حركة القرص تكون مستوية بالنسبة للمستوي العمودي على المحورين.

1. إذا كان متجها الدوران $\boldsymbol{\Omega_e}$ و $\boldsymbol{\Omega_r}$ باتجاه واحد.

بالتالي النقطة A الواقعة على المحور aa_1 تكتسب سرعة نتيجة الدوران حول المحور bb_1 ، تعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{V_A} = \boldsymbol{\Omega_e} \wedge \mathbf{AB}$$

وقيمتها العددية:

$$V_A = w_e . AB$$

أما النقطة B الواقعة على المحور bb_1 ، حيث تكتسب سرعة نتيجة الدوران حول المحور aa_1 ، تعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{V_B} = \boldsymbol{\Omega_r} \wedge \mathbf{AB}$$

وقيمتها العددية:

$$V_B = w_r . AB$$

والمتجهان $\boldsymbol{V_A}$ و $\boldsymbol{V_B}$ متوازيان، وكلاهما عمودي على AB ، ويتجهان في اتجاهين متضادين، عندئذ نحصل على المركز الآني للدوران G حيث ($\boldsymbol{V_G} = 0$)، والمحور GG_1 الموازي للمحورين Aa_1 و Bb_1 كما هو مبين في (الشكل-7-5b)، ويعد المحور GG_1 المحور الآني لدوران.

لتعيين السرعة الزاوية ω لمحور الدوران الآني، أي لدوران القرص حول المحور الآني للدوران، نستخدم علاقة تناسب سرعة جسيمات الجسم بالنسبة للمركز الآني G ، وتعطى بالعلاقة:

$$w = \frac{V_B}{BG} = \frac{V_A}{AG} \qquad (1)$$

ومن خواص التناسب:

$$w = \frac{V_B + V_A}{BG + AG} = \frac{V_A + V_B}{AB}$$

وبتعويض بكل من قيم V_A و V_B في المعادلة نحصل على:

$$w = w_r + w_e$$

وهكذا تكون الحركة المحصلة في هذه الحالة دورانا لحظيا بسرعة زاوية مطلقة $(w = w_r + w_e)$ حول المحور الآني للدوران GG_1 ، الذي يتحدد موضعه بالعلاقة (1).

كما يمكن تعيين موضع المركز الآني G من العلاقة (1) حيث نحصل على:

$$\frac{w}{\mathrm{AB}}=\frac{w_e}{\mathrm{AG}}=\frac{w_r}{\mathrm{BG}} \qquad (2)$$

والتي تشبه تماما العلاقة (7-7).

2. إذا كان متجه الدوران $\boldsymbol{\Omega_r}$ يخالف متجه الدوران $\boldsymbol{\Omega_e}$.

عندئذ يصبح المتجهان $\boldsymbol{V_A}$ و $\boldsymbol{V_B}$ متوازيين، ومتجهين في اتجاه واحد، ويمر المحور الآني للدوران بالنقطة G كما هو مبين في (الشكل-7-6a)، حيث:

$$w=\frac{V_{\mathrm{B}}}{\mathrm{BG}}=\frac{V_{\mathrm{A}}}{\mathrm{AG}}$$

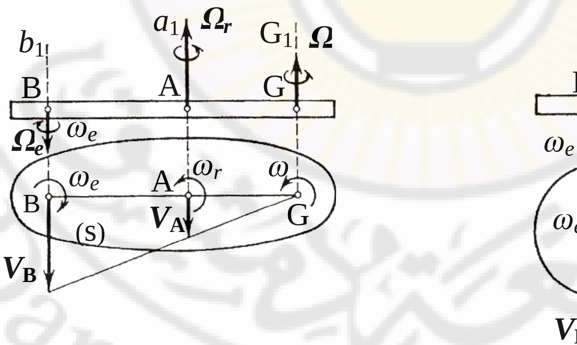
وتبعا لخواص التناسب:

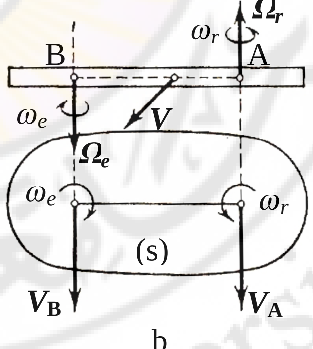
$$w=\frac{V_{\mathrm{B}}-V_{\mathrm{A}}}{\mathrm{BG}-\mathrm{AG}}=\frac{V_{\mathrm{B}}-V_{\mathrm{A}}}{\mathrm{AB}}$$

وبتعويض بكل من قيم V_{A} و V_{B} في المعادلة نحصل على:

$$w=w_r-w_e$$

وهكذا تكون الحركة المحصلة في هذه الحالة أيضاً دوراناً آنياً بسرعة زاوية مطلقة $(w=w_r-w_e)$ حول المحور الآني للدوران $\mathrm{GG_1}$ ، الذي نحدد موضعه بالعلاقة (2).





(الشكل-7-6)

3. إذا كان متجها الدوران في ناحيتين مختلفتين ومتساويتين في القيمة العددية، أي:

$$\boldsymbol{\Omega_r}=-\,\boldsymbol{\Omega_e}$$

تدعى هذه الحالة بازدواج الدوران، كما أن المتجهات $\boldsymbol{\Omega_r},\boldsymbol{\Omega_e}$ تسمى مزدوجة السرعات الزاوية.

ونجد في هذه الحالة أن القيمة العددية لكل من السرعتين $\boldsymbol{V_A}$ و $\boldsymbol{V_B}$ متساويتان ويتجهان باتجاه واحد:

$$V_B = V_A = V$$

ويقع المركز الآني للدوران في اللانهاية، وتكون لجميع جسيمات الجسم في هذه اللحظة سرعات واحدة تساوي:

$$V = w_r \,.\, \mathrm{AB} = w_e \,.\, \mathrm{AB}$$

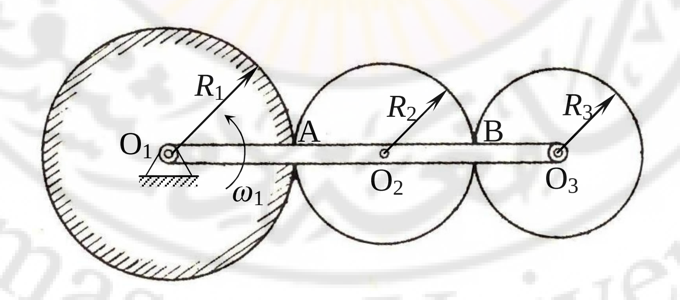
وبالتالي فإن الحركة الممثلة للجسم تكون انسحابية لحظياً بسرعة V ، وتتجه عمودياً على المستوي المار بالمتجهين $\boldsymbol{\Omega_e}$ و $\boldsymbol{\Omega_r}$ ، وجهتها تعين كمتجه عزم المزدوجة $\boldsymbol{\Omega_e}$ و $\boldsymbol{\Omega_r}$ كعزم مزدوجة قوى كما هو مبين في (الشكل-7-6b)، بالتالي ازدواج الدوران يكافئ حركة انسحابية آنية بسرعة V المساوية لعزم ازدواج السرعتين الزاويتين لهذا الدوران.

مسألة -7-1

مجموعة من مسننات متماسكة فيما بينها، تتصل مراكزها بواسطة الوصلة O_1O_3 التي تدور بسرعة زاوية ثابتة مقدارها ω_1 ، حيث المسنن الأول القائد ثابت، وأن أنصاف أقطار هذه المسننات هي R_3 , R_2 , R_1 كما هي موضحة على (الشكل-7-7).

المطلوب دراسة سرع كل من المسننين الثاني والثالث.

الحل:



(الشكل-7-7)

نرمز للسرعات الزاوية المطلقة للمسننين الثاني والثالث بالنسبة للجملة الثابتة $T_1(O_1X_1Y_1Z_1)$ ، المارة في مركز المسنن الأول الثابت بـــ ω_2 و ω_3 ، حيث السرعة الزاوية المكتسبة لهما هي ω_1 .

دراسة سرع المسنن الثاني:

نحسب سرعة المركز O_2 على أساس أنه نقطة من الوصلة O_1O_3 ، والتي تمثل سرعة مطلقة وتساوي:

$$V_{O_2} = (R_1 + R_2) w_1$$

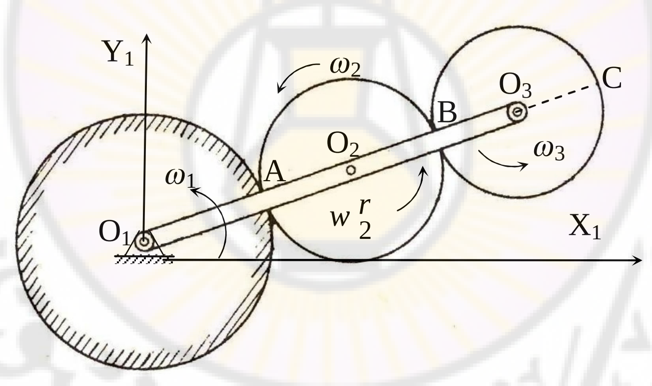
وبما أن المركز O_2 نقطة من المسنن الثاني، ونقطة التعشيق A تمثل المركز الآني للدوران كما هو مبين في (الشكل-7-8)، بالتالي السرعة المطلقة للمركز O_2 تعطى بـــ :

$$V_{O_2} = R_2 . w_2$$

من تساوي السرعتين نحصل على:

$$w_2 = \frac{R_2 + R_1}{R_2} w_1$$

ومنه متجه السرعة الزاوية المطلقة $\boldsymbol{\Omega_2}$ للمسنن الثاني هو باتجاه السرعة الزاوية المكتسبة $\boldsymbol{\Omega_1}$.



(الشكل-7-8)

والسرعة الزاوية النسبية للمسنن الثاني هي:

$$w_2^r = w_2 - w_1 = \frac{R_1}{R_2} w_1$$

التي تتجه أيضاً باتجاه $\boldsymbol{\Omega_1}$.

أما السرعة المطلقة للنقطة B على أساس أنها من المسنن الثاني:

$$V_B = 2R_2 . w_2 = 2(R_1 + R_2) w_1$$

والسرعة النسبية لها:

$$V_B^r = R_2 . w_2^r = R_1 . w_1$$

دراسة سرع المسنن الثالث:

لدينا السرعة المطلقة لـــ O_3 على أساس أنه من الوصلة O_1O_3 :

$$V_{O_3} = (R_1 + 2R_2 + R_3)w_1$$

كما يمكن حساب السرعة المطلقة للمركز O_3 بالنسبة لسرعة النقطة B ، وذلك:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{O_3}} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{B}} + \boldsymbol{V}_{\mathbf{O_3/B}}$$

بما أن المتجهين $\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}}$ و $\boldsymbol{V}_{\mathbf{O_3}}$ متوازيان، بالتعويض نحصل على:

$$(R_1 + 2R_2 + R_3)w_1 = 2(R_1 + R_2)w_1 + R_3.w_3$$

ومنه نحصل على السرعة الزاوية المطلقة للمسنن الثالث:

$$w_3 = \frac{R_3 - R_1}{R_3} w_1$$

نلاحظ أن اتجاه ω_3 يتعلق بالقيمة ($R_3 - R_1$):

فإذا كان ($R_3 > R_1$) فإن اتجاه دوران المسنن الثالث ينطبق مع اتجاه دوران الوصلة O_1O_3 ، والعكس صحيح.

وعندما ($R_3 = R_1$) نجد أن ($\omega_3 = 0$)، ويتحرك عند ذلك المسنن الثالث حركة دورانية حول O_1 .

أما السرعة الزاوية النسبية للمسنن الثالث، فهي:

$$w_3^r = w_3 - w_1 = -\frac{R_1}{R_3} w_1$$

نلاحظ أنه عندما ($R_3 = R_1$)، نجد أن $(w_3^r = -w_1)$، وتشكل السرعتان الزاوية النسبية والمكتسبة عند ذلك ازدواجاً، ونستنتج بهذه الطريقة أيضاً أن الحركة المحصلة للمسنن الثالث هي حركة انسحابية بسرعة:

$$V = O_1O_3.w_1$$

ويمكن حساب السرعة المطلقة للنقطة C بالنسبة لسرعة النقطة O_3 ، وذلك من:

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{C}} = \boldsymbol{V}_{\mathbf{O_3}} + \boldsymbol{V}_{\mathbf{C/O_3}}$$

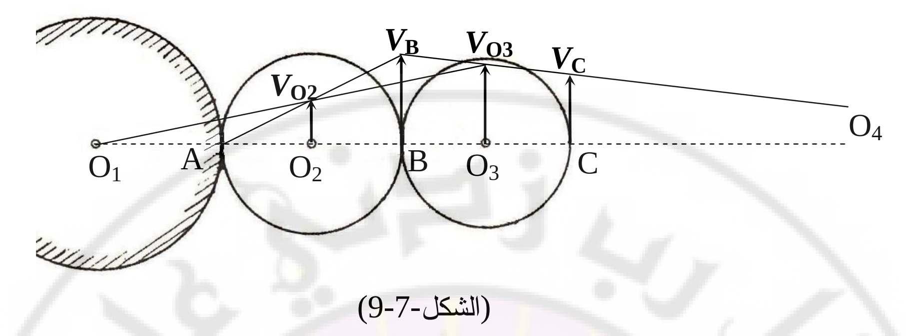
بما أن متجهي الطرف الثاني باتجاه واحد بالتالي يجمع عددياً، بالتعويض:

$$V_C = (R_1 + 2R_2 + R_3)w_1 + R_3.w_3 = 2(R_2 + R_3)w_1$$

أما السرعة النسبية لهذه النقطة:

$$V_C^r = R_3.w_3^r = -R_1.w_1$$

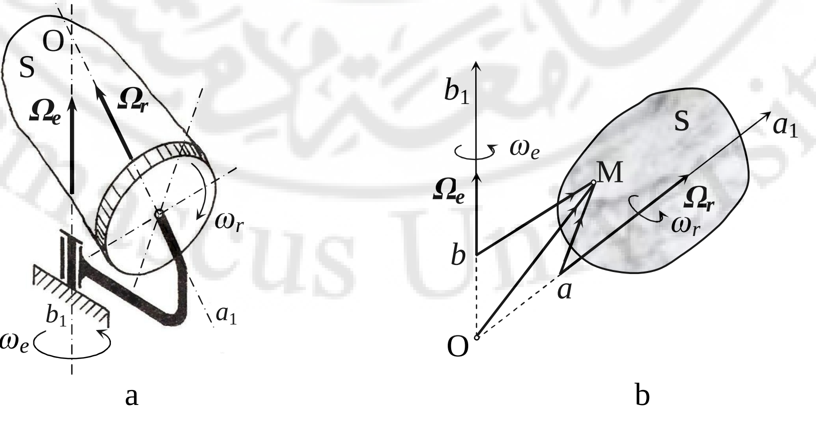
ويتحدد المركز الآني للدوران O_4 للمسنن الثالث تخطيطاً كما هو مبين في (الشكل-7-9).



(الشكل-7-9)

2-3- تقاطع محوري الدوران

يدور الجسم S حول المحور aa_1 ، الذي يدور بدوره مع الجسم حول المحور bb_1 ، حيث يقع المحوران في مستوٍ واحد، ولتكن O نقطة تقاطع محوري الدوران، حيث سرعتها تساوي الصفر لأنها واقعة على كلا المحورين في آن واحد كما هو مبين في (الشكل-7-10a). إن دوران الجسم حول aa_1 عبارة عن الحركة النسبية للجسم بسرعة زاوية $\boldsymbol{\Omega_r}$ ، ودوران الجسم مع المحور aa_1 حول المحور bb_1 عبارة عن الحركة المكتسبة له بسرعة زاوية $\boldsymbol{\Omega_e}$ ، وبالتالي ستكون الحركة المركبة للجسم، أي محصلة الحركتين الدورانيتين عبارة عن حركة جسم حول نقطة ثابتة O ، لأن سرعتها معدومة، كما أنه من أجل كل فترة زمنية صغيرة تكون هذه الحركة عبارة عن دوران صغير بسرعة زاوية $\boldsymbol{\Omega}$ حول محور دوران آني مار من النقطة O ، ولكي نعين المتجه $\boldsymbol{\Omega}$ نحسب السرعة المطلقة لجسيم من الجسم الصلب.



(الشكل-7-10)

نفترض جسيماً M من الجسم الصلب S المبين في (الشكل-7-10b)، حيث:

السرعة النسبية للجسيم M ، هي:

$$\boldsymbol{V}_r = \boldsymbol{\Omega}_r \wedge \boldsymbol{a}\mathbf{M}$$

والسرعة المكتسبة للجسيم M ، هي:

$$\boldsymbol{V}_e = \boldsymbol{\Omega}_e \wedge \boldsymbol{b}\mathbf{M}$$

من الشكل لدينا:

$$\mathbf{OM} = \mathbf{O}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\mathbf{M} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a}\mathbf{M} = \mathbf{OM} + \boldsymbol{a}\mathbf{O}$$
$$\mathbf{OM} = \mathbf{O}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\mathbf{M} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{b}\mathbf{M} = \mathbf{OM} + \boldsymbol{b}\mathbf{O}$$

حيث:
$$\boldsymbol{b}\mathbf{O} \,//\, \boldsymbol{\Omega}_e \quad , \quad \boldsymbol{a}\mathbf{O} \,//\, \boldsymbol{\Omega}_r$$

بالتعويض نحصل على السرعة النسبية للجسيم M :

$$\boldsymbol{V}_r = \boldsymbol{\Omega}_r \wedge \mathbf{OM}$$

السرعة المكتسبة للجسيم M :

$$\boldsymbol{V}_e = \boldsymbol{\Omega}_e \wedge \mathbf{OM}$$

والسرعة المطلقة للجسيم M ، هي:

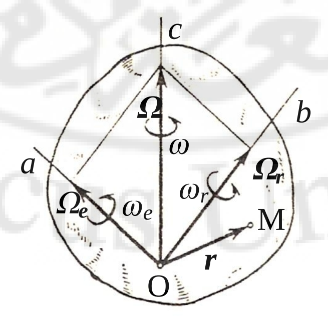
$$\boldsymbol{V}_\mathbf{M} = \boldsymbol{V}_e + \boldsymbol{V}_r = (\boldsymbol{\Omega}_e + \boldsymbol{\Omega}_r) \wedge \mathbf{OM}$$

ومن ناحية أخرى، بما أن الحركة المحصلة للجسم هي دوران لحظي بسرعة زاوية ما $\boldsymbol{\Omega}$ ، فإنه يجب أن تكون:

$$\boldsymbol{V}_\mathbf{M} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM} \qquad (9\text{-}7)$$

ونحصل على مثل هذه النتائج لأي جسيم من جسيمات الجسم، ومنه نستنتج أن:

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_e + \boldsymbol{\Omega}_r \qquad (10\text{-}7)$$



(الشكل-7-11)

لذا نستنتج أنه في الحركة المركبة لجسم صلب S والناتجة من جمع حركتين دورانيتين حول محورين متقاطعين في نقطة O ، تكون الحركة المحصلة للجسم S هي حركة دورانية حول محور Oc يمر في النقطة O ، ومتجه سرعة الدوران $\boldsymbol{\Omega}$ هو المجموع الهندسي لسرعة الدوران المكتسب $\boldsymbol{\Omega_e}$ وسرعة الدوران النسبي $\boldsymbol{\Omega_r}$ ، ويتجه المحور اللحظي للدوران Oc على امتداد متجه سرعة الدوران $\boldsymbol{\Omega}$ أي على امتداد قطر متوازي الأضلاع المرسوم على كل من $\boldsymbol{\Omega_e}$ و $\boldsymbol{\Omega_r}$ ، كما هو مبين في (الشكل-7-11).

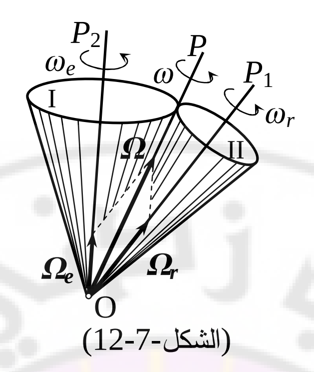
وبما أن متجه الدوران $\boldsymbol{\Omega}$ يتحول مع الزمن، بالتالي يدعى المحور Oc بالمحور الآني للدوران، وبما أن $\boldsymbol{\Omega_r}$ يتحول مع الزمن، بالتالي يرسم محور الدوران الآني $\boldsymbol{\Omega}$ سطح مخروط رأسه O ومحوره bb_1 ، أي $\boldsymbol{\Omega_e}$.

وإذا كان الجسم يدور في آن واحد دوراناً لحظياً حول عدة محاور متقاطعة في النقطة O ، فإننا بالتطبيق المتتالي للمعادلة (7-10) نصل إلى نتيجة هي أن الحركة المحصلة عبارة عن دوران لحظي حول المحور المار بالنقطة O ، وأن السرعة الزاوية لهذه الحركة تساوي:

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega_1} + \boldsymbol{\Omega_2} + \boldsymbol{\Omega_3} + ... + \boldsymbol{\Omega_n}$$

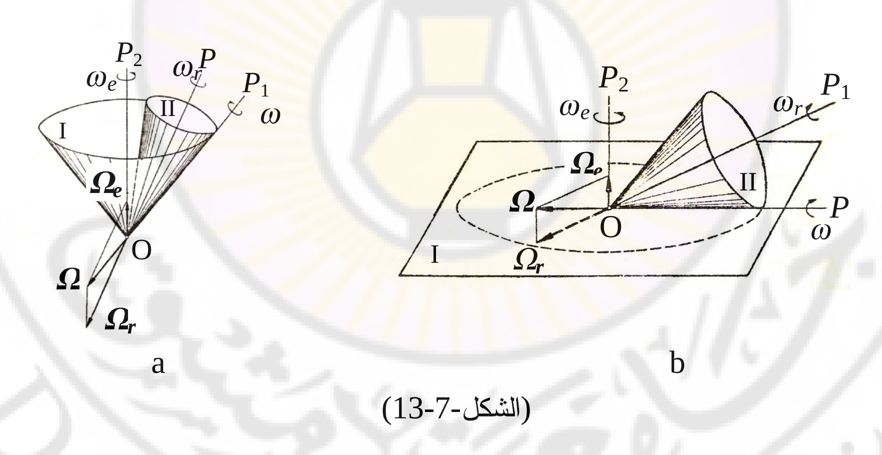
تطبيق

يبين (الشكل-7-12) المخروط II يتدحرج دون انزلاق على المخروط الثابت I ، في هذه الحالة يكون خط تماس المخروطين عبارة عن محور دوران آني OP للحركة المطلقة، كما أن مولدات المخروط II في أثناء التدحرج تصبح محاور دوران آنية بالتتالي، ومحوره OP_1 يدور حول محور المخروط الثابت OP_2 ، بالتالي فإن دوران المخروط II حول المحور الآني OP يمثل الحركة المطلقة وهي عبارة عن مجموع الحركة الدورانية حول المحور OP_1 الممثلة بالحركة النسبية، والحركة الدورانية حول المحور OP_2 تمثل الحركة المكتسبة، وتربط السرعات الزاوية الثلاث وفق العلاقة (7-10)، حيث بمعرفة إحدى السرعات الزاوية الثلاث، ووضعية محاور الدوران الثلاث، يمكن بإنشاء متوازي أضلاع السرعات الزاوية تعيين السرعتين الزاويتين الأخيرتين.



(الشكل-7-12)

يبين (الشكل-7-13a) إنشاء متوازي أضلاع السرعات الزاوية عندما يتدحرج المخروط II دون انزلاق على السطح الداخلي للمخروط I ، ويبين (الشكل-7-13b) إنشاء متوازي أضلاع السرعات الزاوية عندما يتدحرج المخروط II دون انزلاق على مستوٍ ثابت، حيث يلاحظ أنه إذا نظرنا من جهة متجه السرعة الزاوية، فإننا نرى أن الدوران يتم عكس دوران عقارب الساعة.



(الشكل-7-13)

مسألة -7-2

يتدحرج المخروط II بدون انزلاق على المخروط الثابت I كما هو مبين في (الشكل-7-14)، ويدور حوله بعدد دورات قدرها r.p.m 15 بعكس دوران عقارب الساعة. المطلوب إيجاد السرعة الزاوية لدورانه حول محوره، والسرعة الزاوية المطلقة وتسارعه الزاوي.

الحل:

نفترض أن الحركة الدورانية المطلقة للمخروط II حول محور الدوران الآني OP ، تتكون من الحركة الدورانية النسبية حول محوره OP_1 ، ودورانه مع محوره حول محور المخروط الثابت OP_2 التي تمثل الحركة المكتسبة له بسرعة زاوية:

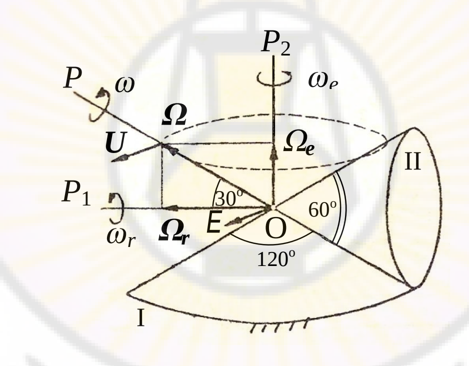
$$w_e = \frac{2p.n_e}{60} = 0.5p \ \text{rad/sec}$$

نرسم المتجه $\boldsymbol{\Omega_e}$ وننشئ متوازي أضلاع السرعات الزاوية الموضح في الشكل، ومنه نعين السرعة الزاوية المطلقة:

$$w = \frac{w_e}{\sin 30^o} = \frac{0.5p}{0.5} = p \ \text{rad/sec}$$

والسرعة الزاوية النسبية:

$$w_r = \frac{w_e}{\tan 30^o} = 0.5p\sqrt{3} = 2.72 \ \text{rad/sec}$$



(الشكل-7-14)

ولتعيين التسارع الزاوي ε يلزم تحديد راسم خطى المتجه $\boldsymbol{\Omega}$ ، وحساب سرعة نهايته $\boldsymbol{U}$ ، وبما أن راسم خطى $\boldsymbol{\Omega}$ عبارة عن دائرة موازية لقاعدة المخروط الثابت، فإن القيمة العددية للسرعة $\boldsymbol{U}$ تساوي وفق الشكل:

$$U = w_e.w_r = 0.5p \times 0.5p\sqrt{3} = 0.25p^2\sqrt{3} \ \text{rad/sec}^2$$

وبما أن:

$$E = \boldsymbol{U} \qquad \Rightarrow \qquad e = U = 4.23 \ \text{rad/sec}^2$$

أما اتجاه كل من $\boldsymbol{U}$ و E فهي عمودية على مستوي الشكل باتجاه القارئ، كما هو مبين على الشكل.

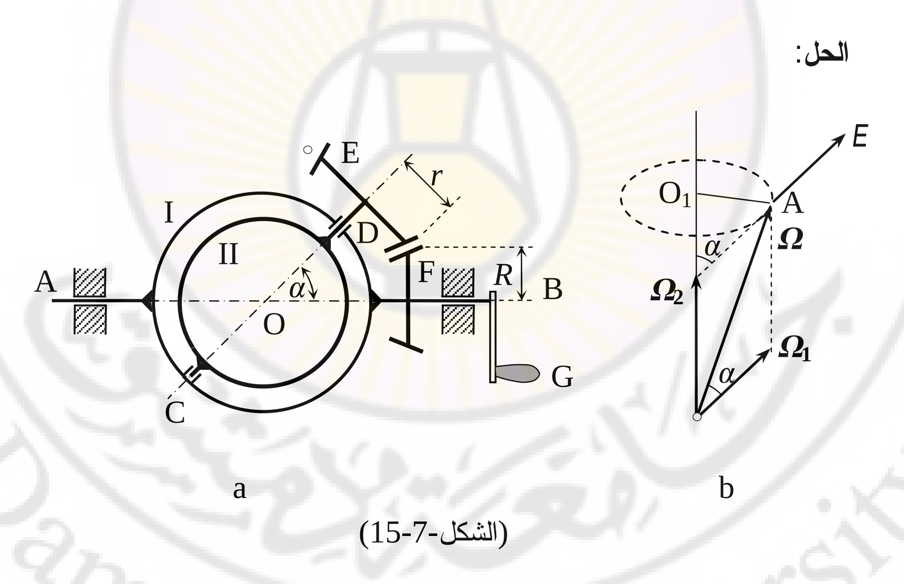
مسألة 3-7-3

كسارة كروية تتكون من كرة جوفاء II تحوي بداخلها كرات معدنية والمادة المراد تكسيرها، مركبة على المحور CD المثبت عليه مسنن مخروطي E نصف قطره r ، والمركب بدوره على كرسي تحميل في الاطار I الذي يشكل وحدة متكاملة مع المحور AB ، الذي يدار بواسطة المقبض G والمثبت عليه مسنن مخروطي F نصف قطره R حيث يعشق مع المسنن المخروطي E كما هو مبين في (الشكل-7-15a).

فإذا كانت الزاوية المحصورة بين محوري الدوران AB و CD تساوي α ، واليد G تدور بسرعة زاوية ω_2 ، المطلوب حساب:

1. السرعة الزاوية المطلقة للآلة.
2. التسارع الزاوي المطلق للآلة في الحالة التي تكون فيها السرعة الزاوية لليد ω_2 ثابتة.

الحل:



(الشكل-7-15)

1. تؤول المسألة إلى دراسة حركة محصلة لحركتين دورانيتين يتقاطع محورا دورانهما في نقطة O ، ويصنعان زاوية α بينهما، فالحركة المحصلة هي حركة دورانية حول محور دوران آني $\boldsymbol{\Omega}$ يمر من O ، حيث:

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{\Omega}_2 = \boldsymbol{\Omega}_r + \boldsymbol{\Omega}_e$$

وقيمته العددية:

$$w = (w_1^2 + w_2^2 + 2w_1.w_2.\cos a)^{1/2}$$

ولإيجاد العلاقة بين ω_1 و ω_2 ، حيث يدور المسنن E بتأثير المسنن F ، والنقطة المشتركة على محيط المسنن تتصف بسرعة خطية واحدة:

$$r.w_1 = R.w_2 \quad \Rightarrow \quad w_1 = \frac{R}{r} w_2$$

بالتعويض نحصل على:

$$w = \frac{w_2}{r}(R^2 + r^2 + 2R.r.\cos a)^{1/2}$$

2. لحساب التسارع الزاوي المطلق للآلة، لدينا:

$$E = \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}$$

حيث يرسم متجه السرعة الزاوية الآنية $\boldsymbol{\Omega}$ حول المحور الثابت $\boldsymbol{\Omega_2}$ ، سطح مخروط محوره $\boldsymbol{\Omega_2}$ ، فإذا كان ω_2 ثابتاً كان ω ثابتاً أيضاً، ورسمت النقطة A نهاية المتجه $\boldsymbol{\Omega}$ دائرة يقع مركزها على $\boldsymbol{\Omega_2}$ ، ويكون O_1A هو نصف قطر الدائرة كما هو مبين في (الشكل-7-15b)، وبالتالي التسارع الزاوي E يمثل سرعة النقطة A في دورانها حول O_1 ، وقيمته العددية:

$$e = O_1A.w_2$$

وبما أن:

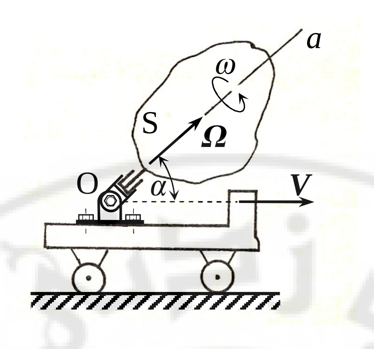
$$O_1A = w_1.\sin a = (R/r)w_2.\sin a$$

فيكون:

$$e = (R/r)w_2^2.\sin a$$

4- تركيب حركتين دوران وانسحاب

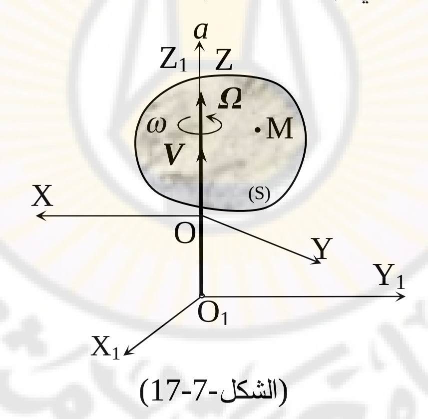
تتكون الحركة المركبة للجسم من حركة دورانية حول محور مقيد به بسرعة زاوية ω ، ومن حركة انسحابية بسرعة خطية $\boldsymbol{V}$ في اتجاه يصنع زاوية α مع متجه الدوران $\boldsymbol{\Omega}$ ، مثال ذلك حركة دوران الجسم S حول المحور Oa المتصل بعربة تتحرك حركة انسحابية كما هو مبين في (الشكل-7-16)، لدراسة الحركة نعد جملة إحداثية T(OXYZ) مقيدة بالجسم S حيث ينطبق المحور OZ على متجه الدوران $\boldsymbol{\Omega}$ ، ونرد حركة الجسم إلى ثلاثية ثابتة قائمة ومباشرة $T_1(O_1X_1Y_1Z_1)$ ، نميز الحالات التالية:



(الشكل-7-16)

1-4- حالة الانسحاب يوازي متجه الدوران

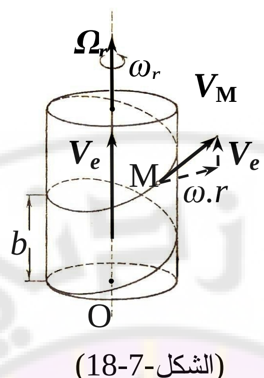
تتكون الحركة المركبة للجسم S حالة ($\boldsymbol{V} // \boldsymbol{\Omega}$) ، من حركة دورانية حول محور Oa المقيد به، والمنطبق على المحور OZ في الجملة المتحركة T بسرعة زاوية ω ، ومن حركة انسحابية بسرعة خطية V في اتجاه يوازي محور الدوران Oa ، أي المحور O_1Z_1 كما هو مبين في (الشكل-7-17).



(الشكل-7-17)

فالحركة النسبية هي حركة دوران الجسم الصلب حول المحور OZ بسرعة زاوية مقدارها ($\omega_r = \omega$)، والحركة المكتسبة هي حركة انسحاب الجسم بسرعة ($V_e = V$) موازية المتجه $\boldsymbol{\Omega_r}$ ، فتكون في هذه الحالة حركة الجسم المحصلة هي حركة لولبية كما هو مبين في (الشكل-7-18) (راجع الحركة اللولبية - الفصل الثاني).

بحسب القاعدة المتبعة لإشارة $\boldsymbol{\Omega_r}$ فإن الحركة اللولبية تكون يمينية عندما تتفق $\boldsymbol{V}$ و $\boldsymbol{\Omega_r}$ بالاتجاه ويدعى باللولب اليميني، وتكون يسارية عندما لا تتفق $\boldsymbol{V}$ و $\boldsymbol{\Omega_r}$ بالاتجاه ويدعى باللولب اليساري.



(الشكل-7-18)

وتسمى المسافة المقطوعة على محور اللولب خلال الزمن T الموافق لدورة واحدة لأي جسيم بخطوة الحركة اللولبية ويرمز له بـــ b ، والذي يحدد من العلاقتين:

$$b = V.T \qquad , \qquad T = 2p / w \qquad \Rightarrow \qquad b = 2pV / w$$

وفي حال ثبات V و ω فإن خطوة اللولب b تكون ثابتة.

ولتعيين سرعة أي جسيم M من الجسم

بما أن الحركة النسبية هي حركة دوران الجسم حول المحور OZ ، وبالتالي تعطى السرعة النسبية للجسيم بالعلاقة:

$$\boldsymbol{V_r} = \boldsymbol{\Omega_r} \wedge \mathbf{OM}$$

أما الحركة المكتسبة فهي الحركة الانسحابية، حيث الانسحاب يوازي $\boldsymbol{\Omega_r}$ ، أي المحور O_1Z_1 ، وفيها تكون سرع جسيمات الجسم كلها مسايرة، وتساوي سرعة القطب ($\boldsymbol{V_O} = \boldsymbol{V_e}$) ، الذي يوازي بالفرض $\boldsymbol{\Omega_r}$ لأن ($\alpha = 0$)، وعليه يمكن أن نضع:

$$\boldsymbol{V_e} = b.\boldsymbol{\Omega_r}$$

حيث b عدد جبري موجب عندما يتجه الانسحاب في جهة $\boldsymbol{\Omega_r}$ ، والعكس صحيح.

ومنه السرعة المطلقة للجسيم M :

$$\boldsymbol{V_M} = \boldsymbol{V_e} + \boldsymbol{V_r} = b.\boldsymbol{\Omega_r} + \boldsymbol{\Omega_r} \wedge \mathbf{OM}$$

بما أن متجهي الطرف الثاني متعامدان، فالقيمة العددية لـــ $\boldsymbol{V_M}$ تساوي:

$$V_M = V_a = [w_r^2 (OM)^2 + V_O^2]^{1/2}$$

ويتجه باتجاه المماس لمسار الجسيم اللولبي، ويميل على الأفق بمقدار:

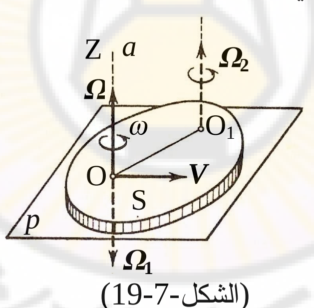
$$\tan a' = \frac{b}{2p.r}$$

فإذا انتخبنا الجملة الثابتة T_1 منطبقة على الجملة المتحركة T في اللحظة t كما هو مبين في (الشكل-7-17)، وكان المقداران العدديان V و ω ثابتين، ومنه b ثابتة، رسم كل جسيم M في الجسم الصلب S ، غير واقع على محور الدوران بدلالة الجملة الثابتة T_1 لولباً دائرياً، خطوته المختزلة b الثابتة، ومتجه دورانه $\boldsymbol{\Omega_r}$ ، ومحوره هو محور الدوران.

لذا نستنتج أنه في الحركة المركبة لجسم صلب والناتجة من حركة دورانية حول المحور OZ بسرعة ω ، وحركة انسحابية بسرعة $\boldsymbol{V}$ تتجه موازية لمحور الدوران، فإن حركة الجسم المحصلة هي حركة لولبية.

2-4- حالة الانسحاب يعامد متجه الدوران

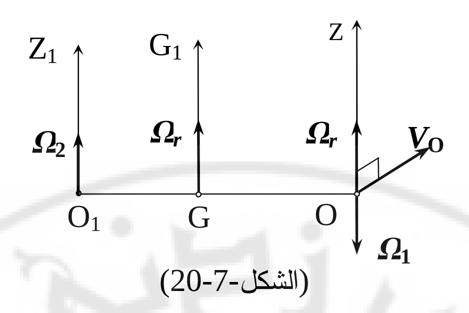
تتكون الحركة المركبة للجسم S حالة ($\alpha = 90^o$)، من حركة دورانية حول محور Oa المقيد به، والمنطبق على المحور OZ في الجملة المتحركة T بسرعة زاوية ω ، ومن حركة انسحابية بسرعة خطية $\boldsymbol{V}$ في اتجاه يعامد محور الدوران Oa ، أي المحور OZ كما هو مبين في (الشكل-7-19).



(الشكل-7-19)

فالحركة النسبية هي حركة دوران الجسم الصلب حول المحور OZ بسرعة زاوية مقدارها ($\omega_r = \omega$)، والحركة المكتسبة هي حركة انسحاب الجسم بسرعة ($V_e = V$) تساوي $\boldsymbol{V_O}$ سرعة النقطة O ، وتعامد المتجه $\boldsymbol{\Omega_r}$ ، فتكون في هذه الحالة الحركة المحصلة للجسم هي حركة مستوية عامة توازي مستوياً ثابتاً، واختيار النقطة O قطباً فيها.

لقد وجدنا في تركيب حركتين دورانيتين، أي حالة توازي محوري الدوران، إمكان كون الانسحاب محصلة حركتين دورانيتين في اتجاهين متعاكسين حول محورين متوازيين هما OZ و O_1Z_1 ، وسرعة الانسحاب في هذه الحركة هي عزم ازدواج الدوران، وتقع هذه السرعة في مستوٍ يعامد مستوي محوري الدوران، أي يعامد الدوران.



(الشكل-7-20)

وعليه يمكن استبدال سرعة الانسحاب $\boldsymbol{V_O}$ ، بمتجهي دوران هما $\boldsymbol{\Omega_1}$ وفق المحور OZ و $\boldsymbol{\Omega_2}$ وفق المحور O_1Z_1 كما هو مبين في (الشكل-7-20)، على أن يكون ذراع المزدوجة OO_1 معيناً بالعلاقة:

$$OO_1 = V_O / w_r$$

وأن يكون متجها الدوران:

$$\boldsymbol{\Omega_1} = - \boldsymbol{\Omega_2}$$

ويعطينا اتجاه سرعة الانسحاب $\boldsymbol{V_O}$ جهة كل من المتجهين $\boldsymbol{\Omega_1}$ و $\boldsymbol{\Omega_2}$ ، إذ أن السرعة $\boldsymbol{V_O}$ ينبغي أن تدور في الجهة المباشرة حول $\boldsymbol{\Omega_2}$ ، حيث:

$$\boldsymbol{V_O} = \boldsymbol{\Omega_2} \wedge \mathbf{O_1O} = \boldsymbol{\Omega_1} \wedge \mathbf{OO_1}$$

من هذه العلاقة يمكن حساب القيمة العددية للسرعة الزاوية ω_1 و ω_2 .

وتؤول الحركة المحصلة إلى ثلاثة دورانات $\boldsymbol{\Omega_1}, \boldsymbol{\Omega_2}, \boldsymbol{\Omega_r}$ حول محورين متوازيين هما: $(\boldsymbol{\Omega_1} + \boldsymbol{\Omega_r})$ حول المحور OZ ، و $\boldsymbol{\Omega_2}$ حول المحور O_1Z_1 .

ولقد ناقشنا هذه الحالة في تركيب حركتين دورانيتين، بالتالي الحركة المحصلة للجسم الصلب هي حركة دورانية حول المحور الآني GG_1 بسرعة زاوية $\boldsymbol{\Omega_r}$ ، و G مركز السرعة الآني. نلاحظ أن دوران الجسم حول المحاور OZ و GG_1 يحصل بسرعة زاوية واحدة $\boldsymbol{\Omega_r}$ ، أي أن القسم الدوراني من الحركة لا يتعلق باختيار القطب.

4-3- حالة الانسحاب يصنع زاوية ما مع متجه الدوران

تتكون الحركة المركبة للجسم S حالة متجه الحركة الانسحابية لا يوازي ولا يتعامد مع متجه السرعة الزاوية للحركة الدورانية، من حركة دورانية حول محور Oa المقيد به، والمنطبق على المحور OZ في الجملة المتحركة T بسرعة زاوية ω ، ومن حركة انسحابية بسرعة خطية V_O تصنع مع متجه الدوران $\boldsymbol{\Omega}$ زاوية ما مقدارها α ، كما هو مبين في (الشكل-7-21a).

فالحركة النسبية هي حركة دوران الجسم الصلب حول محور OZ بسرعة زاوية $(\boldsymbol{\Omega_r} = \boldsymbol{\Omega})$ ، والحركة المكتسبة هي حركة انسحاب الجسم بسرعة $\boldsymbol{V_O}$ تصنع مع المتجه $\boldsymbol{\Omega_r}$ زاوية ما.

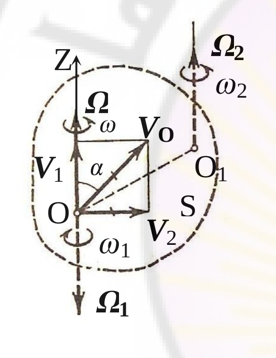
يمكننا في هذه الحالة تحليل السرعة $\boldsymbol{V_O}$ إلى مركبتين إحداهما توازي المتجه $\boldsymbol{\Omega_r}$ ، والثانية تعامدها، حيث:

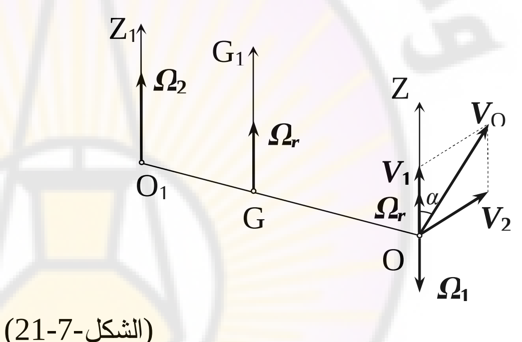
المركبة الموازية لــ $\boldsymbol{\Omega_r}$ هي:

$$V_1 = V_O . \cos a$$

والمركبة العمودية على $\boldsymbol{\Omega_r}$ هي:

$$V_2 = V_O . \sin a$$





(الشكل-7-21)

والسرعة الانسحابية $\boldsymbol{V_2}$ هي محصلة حركتين دورانيتين $\boldsymbol{\Omega_1}$ و $\boldsymbol{\Omega_2}$ ، حيث يمكن استبدال السرعة $\boldsymbol{V_2}$ بالمتجهين $\boldsymbol{\Omega_1}$ و $\boldsymbol{\Omega_2}$ ، أي بالمزدوجة $\boldsymbol{\Omega_1}$ - و $\boldsymbol{\Omega_1}$ ، والقيم العددية لهما تعطى بـــ :

$$w_2 = w_1 = \frac{V_2}{O_1O} = \frac{V_O . \sin a}{O_1O}$$

وتؤول الحركة في الحالة العامة إلى:

انسحاب وفق المحور OZ بسرعة:

$$V_1 = V_O . \cos a$$

ودوران حول المحور GG_1 ، المحور الآني للدوران، الذي يوازي المحور OZ ، ويمر في النقطة G ، المركز الآني للدوران، التي تبعد عن O بالمقدار:

$$OG = \frac{V_2}{w_r} = \frac{V_O . \sin a}{w_r}$$

أما متجه الدوران فهو المجموع الهندسي للدورانات $\boldsymbol{\Omega_1}, -\boldsymbol{\Omega_1}, \boldsymbol{\Omega_r}$ فهو يساوي $\boldsymbol{\Omega_r}$.

فالحركة المحصلة هي مجموع حركة دورانية حول المحور GG_1 ، وانسحاب يوازي GG_1 ، فهي إذن حركة لولبية آنية محورها يوازي GG_1 ، وخطوتها المختزلة b تعين من السرعة المكتسبة:

$$V_e = V_1 = V_O.\cos a = b.w_r \quad \Rightarrow \quad b = V_O.\cos a / w_r$$

بالعودة إلى حركة الجسم الصلب في الحالة العامة، الحركة المستوية العامة يمكن عَدُّ حركة الجسم الصلب في كل لحظة t ، محصلة حركة دورانية $\boldsymbol{\Omega}$ حول محور آني، وحركة انسحابية توازي $\boldsymbol{\Omega}$.

فإذا انتقل الجسم من الوضع I في اللحظة t_1 إلى الوضع II في اللحظة ($t_2 = t_1 + \Delta t$)، أمكن اعتماد هذا الانتقال محصلة انسحاب بسرعة $\boldsymbol{V_O}$ للجسم بكامله، ثم دوران الجسيم M في الجسم الصلب بسرعة $\boldsymbol{V_{M/O}}$ حول المحور الذي يمر من القطب O ، ومنه:

$$\boldsymbol{V_M} = \boldsymbol{V_O} + \boldsymbol{V_{M/O}} = \boldsymbol{V_O} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM}$$

بما أن المقادير $\boldsymbol{V_O}, \boldsymbol{\Omega}, \alpha$ بوجه عام تتغير طوال الوقت عند الحركة المستوية العامة للجسم الصلب، فإن موضع المحور GG_1 يتغير أيضاً باستمرار، لذا يسمى بالمحور اللولبي اللحظي، وهكذا يمكن عَدّ حركة الجسم الصلب الحر حركة مركبة من سلسلة حركات لولبية لحظية حول المحاور اللولبية المتغيرة باستمرار.

مسألة -7-4

تدور أسطوانة دائرية حول محورها بسرعة زاوية ($\omega_0 = 5$ rad/sec)، المطلوب:

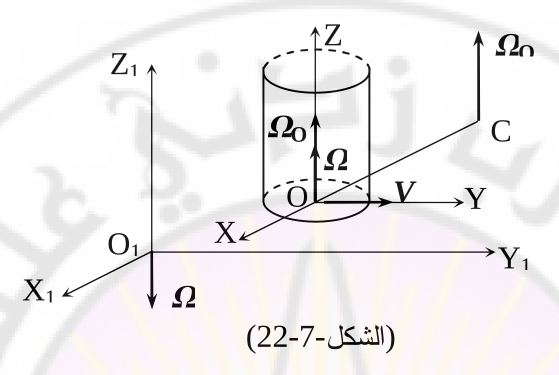
1. تعيين المحور الآني للدوران، إذا سحبت الأسطوانة باتجاه ثابت يعامد محورها بسرعة قدرها ($V = 5$ m/sec).

2. تعيين الحركة الناتجة، ودراسة توزع السرع في مختلف جسيمات الأسطوانة في لحظة معينة t ، فيما إذا سحبت باتجاه ثابت بسرعة قدرها ($V = 5$ m/sec) تصنع زاوية ($\alpha = 30^o$) مع محور الأسطوانة.

الحل:

1. بما أن الانسحاب يعامد الدوران، لذا نفترض الجملة الثابتة $T_1(O_1X_1Y_1Z_1)$ ، حيث المحور O_1Z_1 يوازي محور الأسطوانة OZ ، الموازي لمتجه السرعة الزاوية لدوران الأسطوانة $\boldsymbol{\Omega_0}$ المنطبق على محورها.

كما نفترض أن متجه سرعة انسحاب الأسطوانة العمودي دوماً على محور الأسطوانة $\boldsymbol{V}$ ، الثابتة والمنطبقة على المحور O_1Y_1 ، أو المحور OY كما هو مبين في (الشكل-7-22).



(الشكل-7-22)

إن الحركة الانسحابية تكافئ محصلة حركتين دورانيتين لمتجهي سرعتين $\boldsymbol{\Omega_1}$ و $\boldsymbol{\Omega_2}$ ، حيث يكون ($\boldsymbol{\Omega_2} = - \boldsymbol{\Omega_1} = \boldsymbol{\Omega}$)، وينطبقان على المحورين OZ و O_1Z_1 حيث تؤلفان ازدواجاً عزمه $\boldsymbol{V}$ ، يدور في الجهة المباشرة حوله، ويكون مستوى الازدواج معامداً في كل لحظة t المتجه $\boldsymbol{V}$ ، الذي ينطبق على المستوي XOZ وقيمته العددية تساوي V ، وذراعه OC يعطى بـــ :

$$V = \mathrm{OC}.w_0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{OC} = V / w_0 = 1\,\mathrm{m}$$

وتقع C على المحور OX وفي الجهة السالبة، وذلك حتى يكون الدوران مباشر حوله لـــ $\boldsymbol{V}$ أيضاً، ومنه:

$$\mathbf{OC} = -1\,\boldsymbol{i}$$

والمحور الآني للدوران يمر من C ويوازي OZ ، ويرسم مركز الدوران الآني مستقيماً يوازي O_1Y_1 ويقع في المستوي $O_1X_1Y_1$.

2. نفرض أن متجه السرعة $\boldsymbol{V}$ يقع في المستوي $O_1X_1Y_1$ ، حيث يصنع زاوية ($\alpha = 30^o$) مع المحور OZ ، لذا نحلل $\boldsymbol{V}$ إلى مركبتين:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V_1} + \boldsymbol{V_2}$$

حيث $\boldsymbol{V_1}$ تتجه وفق OZ أي وفق O_1Z_1 .

و $\boldsymbol{V_2}$ تتجه وفق OY أي وفق O_1Y_1 المار من القطب O ، التي تكافئ دورانين يشكلان ازدواجاً:

$$\boldsymbol{\Omega_2} = - \boldsymbol{\Omega_1} = \boldsymbol{\Omega}$$

والمركز الآني للدوران الموافق لـــ $\boldsymbol{V_2}$ و $\boldsymbol{\Omega_0}$ ، أي لـــ $\boldsymbol{\Omega_0}$, $\boldsymbol{\Omega_1}$, $\boldsymbol{\Omega_2}$ هو C ، حيث يعين بـــ :

$$\mathbf{OC} = -\frac{V_2}{w}\,\boldsymbol{i} = -\frac{5\sin 30^{\circ}}{5}\,\boldsymbol{i} = -0.5\,\boldsymbol{i}$$

(الشكل-7-23)

والحركة المحصلة هي دوران آني $\boldsymbol{\Omega_0}$ حول المحور الآني للدوران المار من C ، وانسحاب بسرعة $\boldsymbol{V_1}$ توازي $\boldsymbol{\Omega_0}$ ، فالحركة المحصلة هي حركة لولبية آنية محورها يوازي OZ ، ويمر من C كما هو مبين في (الشكل-7-23)، والخطوة المختزلة له:

$$b = V_1 / w = \sqrt{3}/2 \text{ m}$$

لدراسة سرعة جسيم M من الأسطوانة لدينا:

$$\boldsymbol{V_M} = \boldsymbol{V_1} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{CM}$$

حيث:

$$\boldsymbol{V_1} = V.\cos 30^{\circ}.\boldsymbol{k_1} = \frac{5\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{k}_1$$

والمتجه $\mathbf{CM}$ يساوي:

$$\mathbf{CM} = \mathbf{CO} + \mathbf{OO_1} + \mathbf{O_1M}$$

حيث:

$$\mathbf{CO} = (1/2)\,\boldsymbol{i_1}$$

$$\mathbf{OO_1} = -\boldsymbol{V}.t = -\boldsymbol{V_1}.t - \boldsymbol{V}_2.t = -\frac{5\sqrt{3}}{2}t.\boldsymbol{k_1} - \frac{5}{2}t.\boldsymbol{j_1}$$

$$\mathbf{O_1M} = x_1.\boldsymbol{i_1} + y_1.\boldsymbol{j_1} + z_1.\boldsymbol{k_1}$$

ومنه:

$$\mathbf{CM} = (x_1 + \frac{1}{2})\boldsymbol{i_1} + (y_1 - \frac{5}{2}t)\,\boldsymbol{j_1} + (z_1 - \frac{5\sqrt{3}}{2}t)\boldsymbol{k_1}$$

بالتعويض في علاقة السرعة:

$$\boldsymbol{V_M} = \frac{5\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{k_1} + 5\,\boldsymbol{k_1} \wedge [(x_1 + \frac{1}{2})\,\boldsymbol{i_1} + (y_1 - \frac{5}{2}t)\,\boldsymbol{j_1} + (z_1 - \frac{5\sqrt{3}}{2}t)\,\boldsymbol{k_1}]$$

$$\boldsymbol{V_M} = 5(x_1 + \frac{1}{2})\,\boldsymbol{i_1} - 5(y_1 - \frac{5}{2}t)\,\boldsymbol{j_1} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{k_1}$$

نحصل على علاقة توزع السرعة لجسيمات الأسطوانة في لحظة معينة.

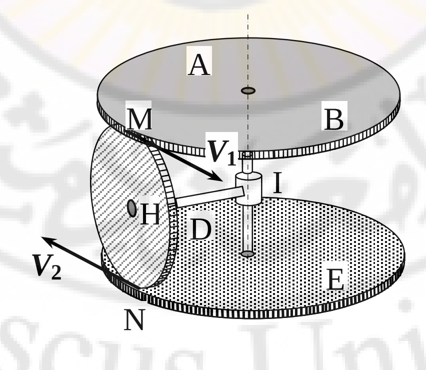
مسألة 5-7-5

علبة تفاضلية مسننة تتكون من قرصين DE و AB ، حيث يقع مركز القرصين على محور شاقولي واحد، والقرص MN نصف قطره (r = 5 cm) يستند شاقولياً على القرصين، ويدور محوره (IH = 1/14 m) حول المحور الشاقولي، كما هو مبين في (الشكل-7-24).

فإذا كانت سرعتا نقطتي تماس القرص MN مع القرصين AB و DE هما (V_1 = 3 m/sec) و (V_2 = 4 m/sec)، المطلوب حساب:

1. سرعة مركز القرص MN ، والسرعة الزاوية لدورانه حول محوره IH .
2. السرعة الزاوية والمطلقة للقرص MN ، وتسارعه الزاوي المطلق.

الحل:



(الشكل-7-24)

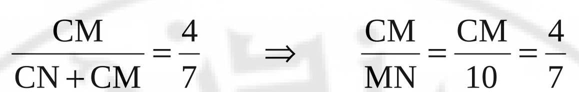
1. يدور القرص MN حول مركز آني للدوران C يقع في مستوى القرص، وعلى المستقيم MN ، وذلك من معرفة:

$$V_M = V_1 = 3\ \text{m/sec} \qquad , \qquad V_N = V_2 = 4\ \text{m/sec}$$

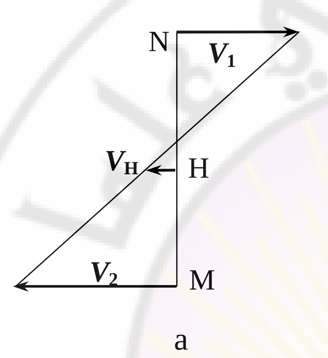
نصل نهايتي السرعتين بمستقيم كما هو مبين في (الشكل-7-25a) فيكون:

$$\frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{CN}} = \frac{4}{3}$$

ومن خواص التناسب:



$$\frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{CN}+\mathrm{CM}} = \frac{4}{7} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{MN}} = \frac{\mathrm{CM}}{10} = \frac{4}{7}$$



a　　　b

(الشكل7-25)

ومنه:

$$\mathrm{CM} = 3\,\mathrm{cm} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{CN} = \mathrm{CM} - 5 = 5/7\,\mathrm{cm}$$

وتكون سرعة مركز القرص H هي:

$$\frac{V_{\mathrm{H}}}{V_2} = \frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{CM}} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_{\mathrm{H}}}{4} = \frac{5}{40} \quad \Rightarrow \quad V_{\mathrm{H}} = 0.5\,\mathrm{m/sec}$$

2. ويمكن حساب السرعة الزاوية الآنية لدوران القرص MN حول محور عمودي على مستويه من العلاقة:

$$V_{\mathrm{H}} = \mathrm{CH}.w_1 \quad \Rightarrow \quad w_1 = 70\,\mathrm{rad/sec}$$

كما يمكن حساب السرعة الزاوية للقرص MN حول محوره الشاقولي من العلاقة:

$$V_{\mathrm{H}} = \mathrm{IH}.w_2 \quad \Rightarrow \quad w_2 = 7\,\mathrm{rad/sec}$$

والسرعة الزاوية المطلقة Ω للقرص MN هي محصلة السرعتين Ω_1 و Ω_2 ، وبما أن محوري الدوران متعامدان كما هو مبين في (الشكل-7-25b)، فإن:

$$w = (w_1^2 + w_2^2)^{1/2} = 70.3\,\mathrm{rad/sec}$$

وبما أن متجه التسارع الزاوي المطلق يعطى بـــ :

$$E = d\boldsymbol{\Omega}/dt$$

عندئذ ترسم نهاية $\boldsymbol{\Omega}$ دائرة مركزها يقع على المحور الشاقولي، ونصف قطرها هو $\boldsymbol{\Omega_1}$ ، وتكون القيمة العددية للتسارع الزاوي المطلق:

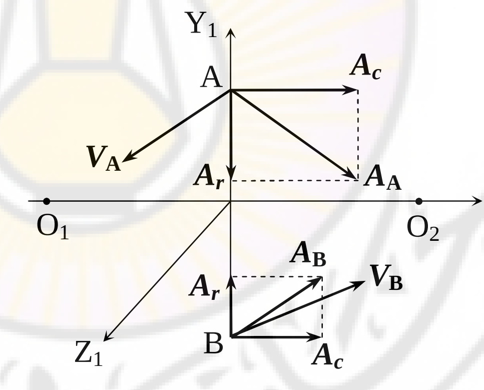
$$e = R.w_2 = w_1.w_2 = 490 \text{ rad/sec}^2$$

مسألة 6-7-

يدور قرص نصف قطره R بسرعة زاوية ثابتة ω_r حول محور أفقي O_1O_2 ، الذي يدور بدوره بسرعة زاوية ثابتة ω_e حول محور شاقولي، حيث يقع مركز القرص عليه كما هو مبين في (الشكل-7-26a).

المطلوب تعيين سرعتي الجسيمين A و B الواقعين على محيط القرص وتسارعهما في اللحظة t ، التي يكون فيها القطر AB شاقولياً، والدورانين يكونان باتجاه عكس حركة عقارب الساعة.

الحل:



a b

(الشكل-7-26)

تحسب السرعة المطلقة للجسيم A من العلاقة:

$$\boldsymbol{V_a} = \boldsymbol{V_e} + \boldsymbol{V_r}$$

حيث السرعة النسبية للجسيم A :

$$\boldsymbol{V_r} = \boldsymbol{\Omega_r} \wedge \mathbf{OA}$$

والسرعة المكتسبة للجسيم A :

$$\boldsymbol{V_e} = \boldsymbol{\Omega_e} \wedge \mathbf{OA}$$

ومنه:

$$\boldsymbol{V_a} = (\boldsymbol{\Omega_r} + \boldsymbol{\Omega_e}) \wedge \mathbf{OA}$$

حيث:

$$\boldsymbol{\Omega_r} = w_r \,.\, \boldsymbol{i_1} \quad , \quad \boldsymbol{\Omega_e} = w_e \,.\, \boldsymbol{j_1}$$

$$\mathbf{OA} = R \,.\, \boldsymbol{j_1} \quad , \quad \mathbf{OB} = R \,.\, \boldsymbol{j_1}$$

بالتعويض نجد أن السرعة المكتسبة لكل من الجسيمين تكون معدومة:

$$(\boldsymbol{V_e})_{\mathrm{A}} = (\boldsymbol{V_e})_{\mathrm{B}} = 0$$

وأن السرعة النسبية لهما الموضحة في (الشكل-7-26b) تساوي:

$$\boldsymbol{V_{\mathrm{A}}} = (\boldsymbol{V_r})_{\mathrm{A}} = w_r \,.\, R . \boldsymbol{k_1} \quad , \quad \boldsymbol{V_{\mathrm{B}}} = (\boldsymbol{V_r})_{\mathrm{B}} = w_r \,.\, R . \boldsymbol{k_1}$$

ويحسب التسارع المطلق لجسيم من العلاقة:

$$\boldsymbol{A_a} = \boldsymbol{A_e} + \boldsymbol{A_r} + \boldsymbol{A_c}$$

حيث التسارع النسبي للجسيم:

$$\boldsymbol{A_r} = \boldsymbol{\Omega_r} \wedge \boldsymbol{V_r}$$

والتسارع المكتسب للجسيم:

$$\boldsymbol{A_e} = \boldsymbol{\Omega_e} \wedge \boldsymbol{V_e}$$

والتسارع المتمم للجسيم:

$$\boldsymbol{A_c} = 2\boldsymbol{\Omega_e} \wedge \boldsymbol{V_r}$$

بالنسبة لمركبات تسارع الجسيم A الموضحة في (الشكل-7-26b)، فهي:

$$(\boldsymbol{A_c})_{\mathrm{A}} = 2w_r \,.\, w_e \,.\, R . \boldsymbol{i_1} \quad , \quad (\boldsymbol{A_r})_{\mathrm{A}} = -w_r^2 \,.\, R \,.\, \boldsymbol{j_1} \quad , \quad (A_e)_{\mathrm{A}} = 0$$

وتكون العلاقة الشعاعية له:

$$\boldsymbol{A_{\mathrm{A}}} = 2w_r \,.\, w_e \,.\, R . \boldsymbol{i_1} - w_r^2 \,.\, R \,.\, \boldsymbol{j_1}$$

وقيمتها العددية:

$$\boldsymbol{A_{\mathrm{A}}} = (4w_r^2 \,.\, w_e^2 \,.\, R^2 + w_r^4 \,.\, R^2)^{1/2} = w_r \,.\, R(4w_e^2 + w_r^2)^{1/2}$$

أما مركبات تسارع الجسيم B الموضحة في (الشكل-7-26b)، فهي:

$$(\boldsymbol{A_c})_{\mathrm{B}} = 2w_r \,.\, w_e \,.\, R . \boldsymbol{i_1} \quad , \quad (\boldsymbol{A_r})_{\mathrm{B}} = w_r^2 \,.\, R \,.\, \boldsymbol{j_1} \quad , \quad (A_e)_{\mathrm{B}} = 0$$

وتكون العلاقة الشعاعية له:

$$\boldsymbol{A_{\mathrm{B}}} = 2w_r \,.\, w_e \,.\, R . \boldsymbol{i_1} + w_r^2 \,.\, R \,.\, \boldsymbol{j_1}$$

وقيمتها العددية:

$$\boldsymbol{A_{\mathrm{B}}} = (4w_r^2 \,.\, w_e^2 \,.\, R^2 + w_r^4 \,.\, R^2)^{1/2} = w_r \,.\, R(4w_e^2 + w_r^2)^{1/2}$$

PROBLEMS مسائل غير محلولة

مسألة - 1

يدور المرفق O_1O_2 بسرعة زاوية ω_0 ، ليحرك المسنن II داخل المسنن الثابت I كما هو مبين في (الشكل-7-27a)، فإذا كانت أنصاف الأقطار r_1 و r_2 ، المطلوب تعيين السرعة الزاوية المطلقة للمسنن II ، وسرعته الزاوية النسبية بالنسبة للمرفق O_1O_2 .

الجواب: $$w_{IIr} = -\frac{r_1}{r_2}w_0 \quad , \quad w_{II\,a} = -\frac{r_1 - r_2}{r_2}w_0$$

(الشكل-7-27)

مسألة - 2

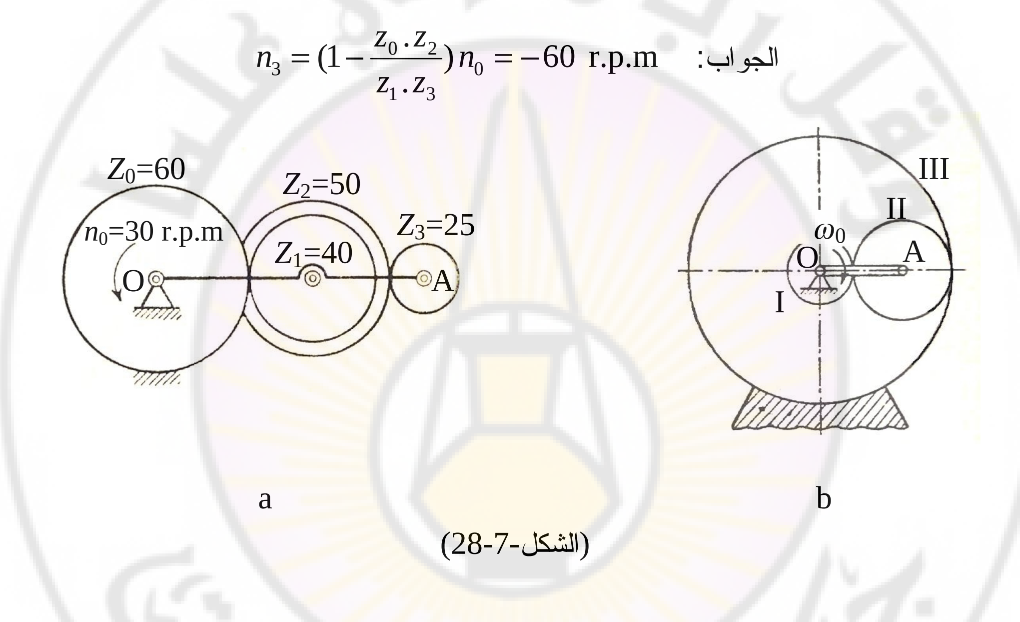
يدور المرفق OA في التركيبة الآلية الموضحة في (الشكل-7-27b)، بسرعة زاوية ω_0 ليحرك المسنن II وعدد أسنانه z_2 داخل المسنن الثابت III ، والمسنن II يحرك بدوره المسنن I وعدد أسنانه z_1 ، والذي يدور حول O . المطلوب إيجاد السرعة الزاوية للمسنن I .

الجواب: $$w_{I} = 2\frac{z_1 + z_2}{z_2}w_0$$

مسألة - 3

يدور المرفق OA حول محور O لمسنن ثابت عدد أسنانه ($z_0 = 60$) بسرعة زاوية ($n_0 = 30$ r p m)، ويحمل محوراً مسنناً مزدوجاً يبلغ عدد أسنانه ($z_1 = 40$) و ($z_2 = 50$) كما هو مبين في (الشكل-7-28a)، المطلوب إيجاد عدد الدورات في الدقيقة الواحدة للمسنن الذي عدد أسنانه ($z_3 = 25$)

الجواب: $n_3 = (1 - \frac{z_0 . z_2}{z_1 . z_3}) n_0 = -60$ r.p.m



(الشكل-7-28)

مسألة - 4

في التركيبة الآلية الموضحة في (الشكل-7-28b)، يركب كل من الذراع OA والمسنن I نصف قطره r_1 على العمود المار من O تركيباً حراً، والمحور O_1 للمسنن II مثبت في الذراع، أما المسنن III نصف قطره r_3 فيدور دوراناً حراً حول المحور O .

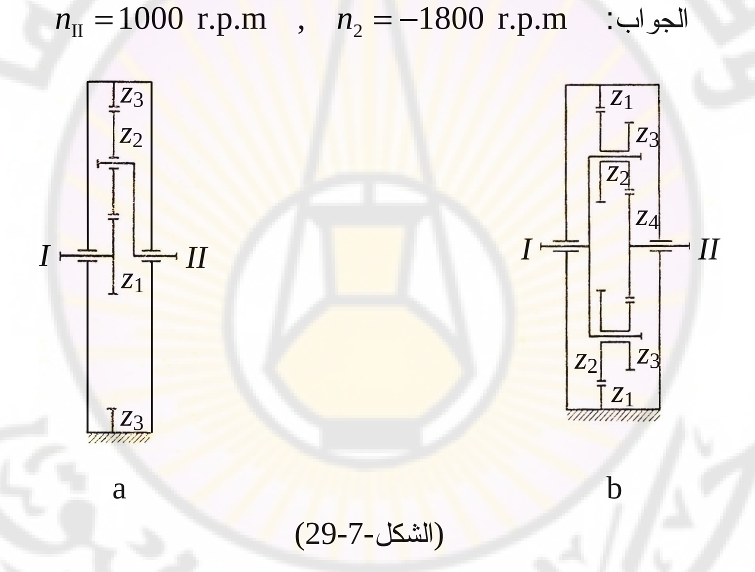
فإذا اكتسب الذراع OA سرعة زاوية ω_0 ، واكتسب المسنن III من محرك آخر سرعة زاوية ω_3 في اتجاه معاكس، المطلوب تعيين السرعة الزاوية ω_1 للمسنن I .

الجواب: $w_1 = (1 + \frac{r_3}{r_1}) w_0 + \frac{r_3}{r_1} |w_3|$

مسألة - 5

يتكون مخفض للسرعات من ثلاثة مسننات، المسنن الأول وعدد أسنانه ($z_1 = 20$) مركب على العمود القائد I الذي يدور بسرعة زاوية ($n_1 = 4500$ r p m)، والمسنن الثاني وعدد أسنانه ($z_2 = 25$) مركب على محور مثبت تماماً في العمود المقود II تركيباً حراً، والمسنن الثالث وعدد أسنانه ($z_3 = 70$) ذات التعشيق الداخلي فهو ثابت كما هو مبين في (الشكل-7-29a). المطلوب إيجاد عدد دورات العمود المقود والمسنن الثاني المتنقل في الدقيقة الواحدة.

الجواب: $n_{II} = 1000$ r.p.m , $n_2 = -1800$ r.p.m



(الشكل-7-29)

مسألة - 6

يدور العمود القائد I في مخفض السرعات الموضح في (الشكل-7-29b)، بعدد دورات قدرها ($n_1 = 1200$ r.p.m.)، فإذا كان عدد أسنان المسنن الثابت ذات التعشيق الداخلي ($z_1 = 180$)، والترسان المتنقلان مقترنان أحدهما بالآخر، وعدد أسنانهما ($z_2 = 60$) و ($z_3 = 40$)، وكان عدد أسنان الترس المثبت في العمود المقود ($z_4 = 80$)، المطلوب إيجاد عدد دورات العمود المقود II في الدقيقة.

الجواب: $n_{II} = 3000$ r.p.m

مسألة - 7

مسننان مخروطيان محورهما ثابتان، وزاويتا استدقاقهما تساويان على الترتيب β و α كما هو مبين في (الشكل7-30a)، فإذا دار المسنن الأول بسرعة زاوية ω_1 ، المطلوب تعيين السرعة الزاوية ω_2 للمسنن الثاني، وما هو قدرها عندما تكون:

$$a = 30^{\circ} \quad , \quad b = 60^{\circ} \quad , \quad n_1 = 95 \text{ r.p.m}$$

الجواب: $$w_2 = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin\frac{b}{2}} w_1 = 5.16 \text{ r.p.m}$$

(الشكل-7-30)

مسألة - 8

أرجوحة دوارة عبارة عن سطح AB مستدير قطره يساوي 10 m ، يدور حول محوره الهندسي OC المار بمركزه D حيث المسافة OD تساوي 2 m ، بسرعة تساوي (n_{AB} = 6 r.p.m)، أما المحور OC فيدور في الاتجاه نفسه حول الخط الرأسي OE بسرعة (n_{OC} = 6 r.p.m)، فإذا كانت الزاوية المحصورة بين المحورين تساوي α كما هو مبين في (الشكل7-30b)، المطلوب تعيين السرعة الخطية للطرف B في اللحظة التي يكون في أدنى وضع له.

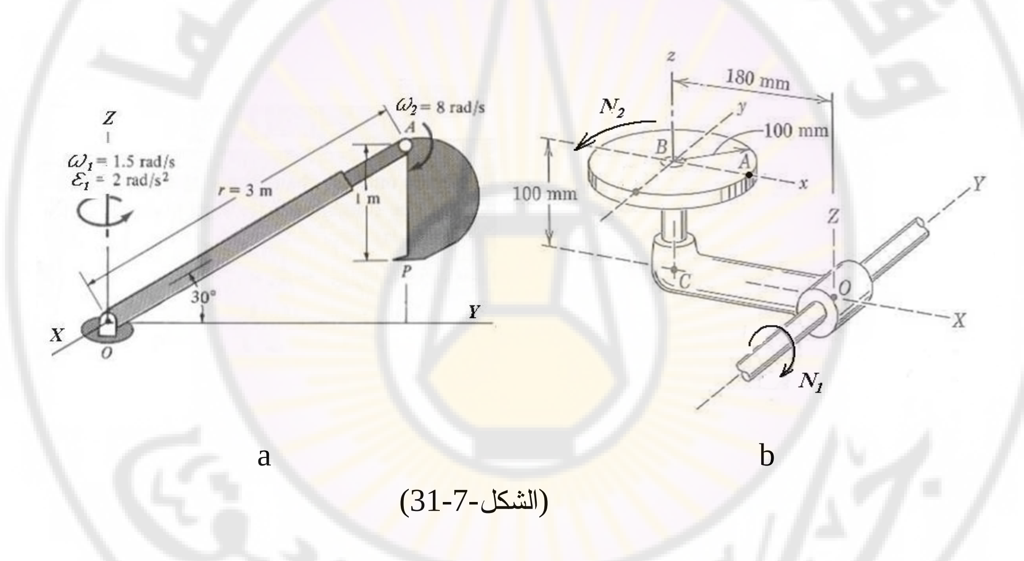
الجواب: $$V_B = 8.77 \text{ m/sec}$$

مسألة - 9

في اللحظة المبينة من الحركة يدور الذراع التلسكوبي OA حول المحور Z ، بعكس دوران عقارب الساعة بسرعة زاوية ثابتة ($\omega_1 = 1.5$ rad/sec)، وفي الوقت ذاته يدور الدلو (*Bucket*) دوراناً منتظماً بسرعة زاوية مقدارها ($\omega_2 = 8$ rad/sec) بالنسبة للذراع. المطلوب للوضع المبين في (الشكل-7-31a) إيجاد السرعة الخطية والتسارع الخطي للنقطة P الواقعة على الدلو.



الجواب: $\boldsymbol{V} = -3.9\,\boldsymbol{i} - 8\,\boldsymbol{j}$ m/sec , $\boldsymbol{A} = 18.8\,\boldsymbol{i} - 5.85\,\boldsymbol{j} + 64\,\boldsymbol{k}$ m/sec^2



a b

(الشكل-7-31)

مسألة - 10

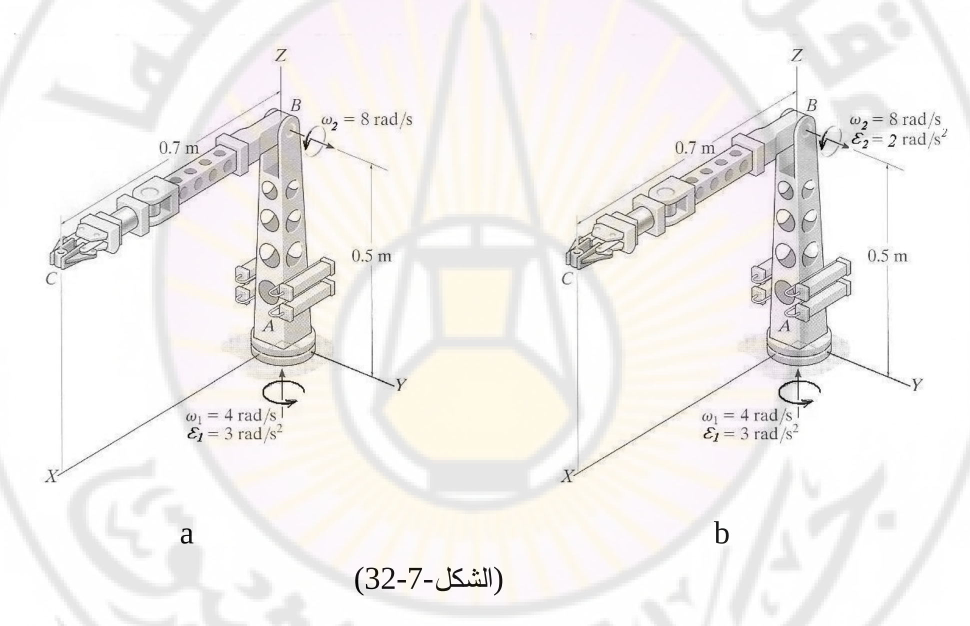
في اللحظة المبينة من الحركة يدور قرص مستدير نصف قطره 100 mm دوراناً منتظماً حول المحور Z بسرعة مقدارها ($N_2 = 240$ r.p.m)، كما يدور في الوقت نفسه الذراع OCB حول المحور Y ، بسرعة مقدارها ($N_1 = 30$ r p m). المطلوب في الوضع المبين في (الشكل-7-31b) إيجاد السرعة الخطية والتسارع الخطي للنقطة A الواقعة على محيط القرص.

الجواب: $\boldsymbol{V} = \pi(0.1\,\boldsymbol{i} + 0.8\,\boldsymbol{j} + 0.08\,\boldsymbol{k})$ m/sec , $\boldsymbol{A} = -\pi^2(6.32\,\boldsymbol{i} + 0.1\,\boldsymbol{k})$ m/sec^2

مسألة - 11

في اللحظة المبينة من الحركة يدور الهيكل الحامل AB حول المحور Z ، بسرعة زاوية مقدارها ($\omega_1 = 4$ rad/sec)، وبتســـــارع زاوي مقداره ($\varepsilon_1 = 3$ rad/sec^2) وفق الاتجاهات الموضحة، ويدور الذراع الآلي BC في الوقت ذاته دوراناً منتظماً بســــرعة زاوية ($\omega_2 = 8$ rad/sec) بالنسبة للذراع. المطلوب للوضع المبين في (الشكل-7-32a) إيجاد السرعة الخطية والتسارع الخطي للرأس القابض C .

الجواب: $\boldsymbol{V} = 2.8\,\boldsymbol{j} - 5.6\,\boldsymbol{k}$ m/sec , $\boldsymbol{A} = -56\,\boldsymbol{i} + 2.1\,\boldsymbol{j}$ m/sec^2



a b

(الشكل-7-32)

مسألة - 12

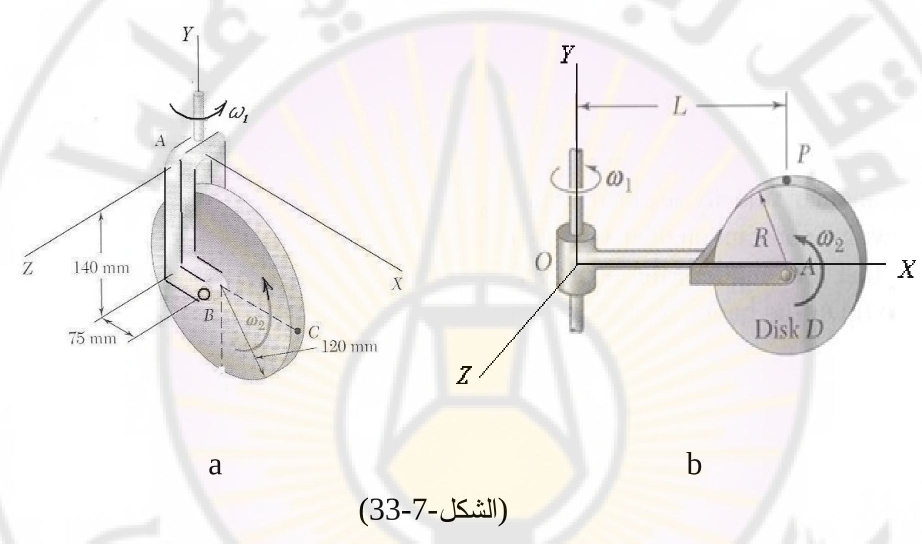
في اللحظة المبينة من الحركة يدور الهيكل الحامل AB حول المحور Z ، بسرعة زاوية مقدارها ($\omega_1 = 4$ rad/sec)، وبتسارع زاوي مقداره ($\varepsilon_1 = 3$ rad/sec^2) وفق الاتجاهات الموضحة، ويدور الذراع الآلي BC في الوقت ذاته بسرعة زاوية ($\omega_2 = 8$ rad/sec) وبتســـارع زاوي مقداره ($\varepsilon_2 = 2$ rad/sec^2) وفق الاتجاهات الموضحة. المطلوب للوضع المبين في (الشكل-7-32b) إيجاد السرعة الخطية والتسارع الخطي للرأس القابض C .

الجواب: $\boldsymbol{V} = 2.8\,\boldsymbol{j} - 5.6\,\boldsymbol{k}$ m/sec , $\boldsymbol{A} = -56\,\boldsymbol{i} + 2.1\,\boldsymbol{j} - 1.4\,\boldsymbol{k}$ m/sec^2

مسألة - 13

يدور دولاب قطره 120 mm دوراناً منتظماً بسرعة زاوية ($\omega_2 = 5$ rad/sec)، كما يدور في الوقت نفسه الذراع AB دوراناً منتظماً أيضاً حول المحور Y بسرعة مقدارها ($\omega_1 = 3$ rad/sec). المطلوب للوضع المبين في (الشكل-7-33b) إيجاد السرعة الخطية والتسارع الخطي للنقطة C الواقعة على محيط القرص.

الجواب: $\boldsymbol{V} = 0.6\,\boldsymbol{j} - 0.585\,\boldsymbol{k}$ m/sec , $\boldsymbol{A} = -\,4.76\,\boldsymbol{i}$ m/sec^2



(الشكل-7-33)

مسألة - 14

يثبت قرص مستدير D نصف قطره R بالذراع OA بواسطة المسمار اللولبي A كما هو مبين في (الشكل-7-33b)، ويدور الذراع المذكور حول محور رأسي يمر من النقطة O بسرعة زاوية ثابتة ω_1 ، بينما يدور القرص حول محور أفقي يمر من النقطة A وفق الاتجاه المبين بسرعة زاوية ثابتة ω_2 . المطلوب إيجاد:

1. السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للقرص.
2. السرعة الخطية والتسارع الخطي للنقطة P التي تقع على محيط القرص.

تفرض المعطيات التالية:

$$\omega_1 = 5 \text{ rad/sec} \quad , \quad \omega_2 = 15 \text{ rad/sec} \quad , \quad R = 0.15 \text{ m} \quad , \quad L = 0.4 \text{ m}$$

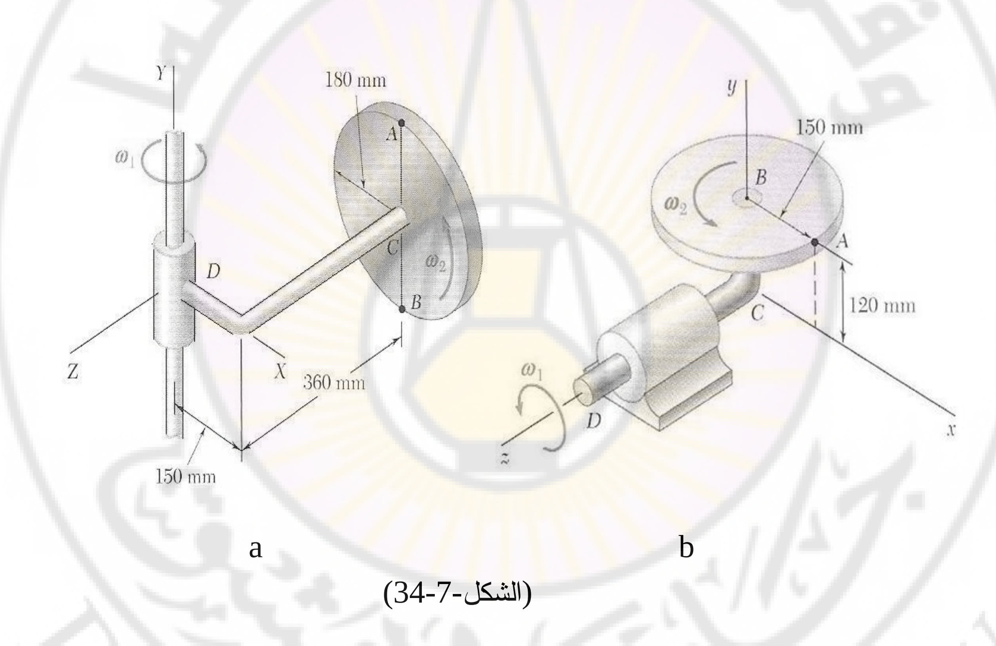
الجواب: $\omega = 5\,\boldsymbol{j} + 15\,\boldsymbol{k}$ rad/sec , $\boldsymbol{\varepsilon} = 75\,\boldsymbol{i}$ rad/sec^2

$\boldsymbol{V} = -\,2.25\,\boldsymbol{i} - 2\,\boldsymbol{k}$ m/sec , $\boldsymbol{A} = -\,10\,\boldsymbol{i} - 33.75\,\boldsymbol{j} + 22.5\,\boldsymbol{k}$ m/sec^2

مسألة - 15

قرص مستدير نصف قطره 180 mm يدور دوراناً منتظماً بسرعة زاوية مقدارها ($\omega_2 = 12$ rad/sec) بالنسبة للذراع CD ، كما يدور في الوقت نفسه الذراع CD دوراناً منتظماً أيضاً حول المحور Y بسرعة زاوية مقدارها ($\omega_1 = 8$ rad/sec). المطلوب للوضع المبين في (الشكل-7-34b) إيجاد السرعة الخطية والتسارع الخطي للنقطة A الواقعة على محيط القرص.

الجواب: $\boldsymbol{V} = -5.04\,\boldsymbol{i} - 1.2\,\boldsymbol{k}$ m/sec , $\boldsymbol{A} = -9.6\,\boldsymbol{i} - 25.9\,\boldsymbol{j} + 57.6\,\boldsymbol{k}$ m/sec^2



(الشكل-7-34)

مسألة - 16

ذراع معقوف BCD يدور حول المحور Z بسرعة زاوية ثابتة مقدارها ($\omega_1 = 5$ rad/sec)، فإذا كان نصف قطر القرص المستدير 150 mm ، وانه يدور حول BC بسرعة زاوية ثابتة ($\omega_2 = 4$ rad/sec). المطلوب للوضع المبين في (الشكل-7-34b) إيجاد السرعة الخطية والتسارع الخطي للنقطة A التي تقع على محيط القرص.

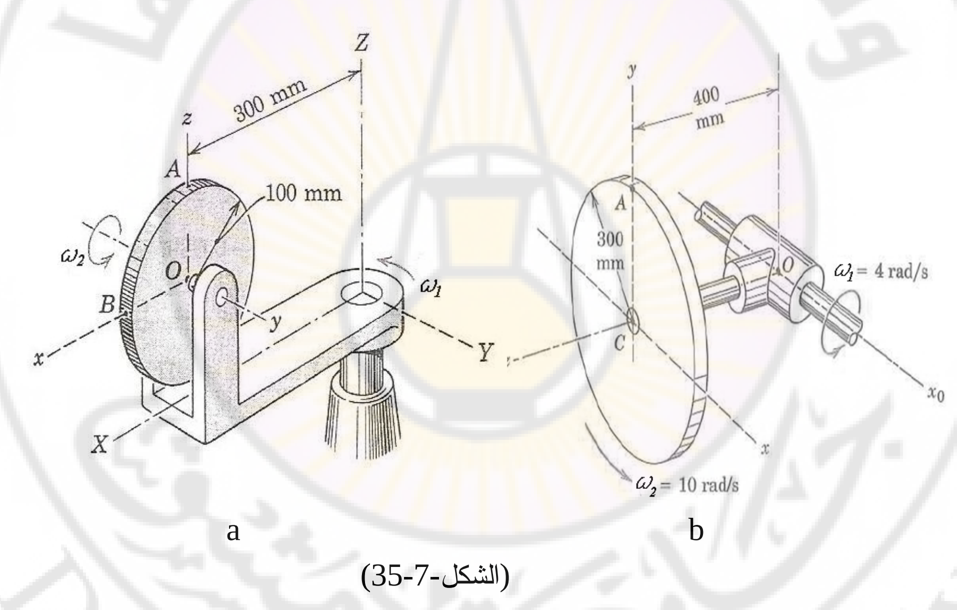
الجواب: $\boldsymbol{V} = -0.6\,\boldsymbol{i} + 0.75\,\boldsymbol{j} - 0.6\,\boldsymbol{k}$ m/s , $\boldsymbol{A} = -6.15\,\boldsymbol{i} - 3\,\boldsymbol{j}$ m/sec^2

مسألة - 17

يدور القرص المستدير حول محوره y دوراناً منتظماً بسرعة زاوية مقدارها ($\omega_2 = 10\,\pi$ rad/sec)، كما يدور في الوقت نفسه الهيكل الحامل دوراناً منتظماً أيضاً حول المحور Z بسرعة زاوية مقدارها ($\omega_1 = 4\,\pi$ rad/sec). المطلوب للوضع المبين في (الشكل-7-35b) إيجاد ما يلي:

1. السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للقرص
2. السرعة الخطية والتسارع الخطي للنقطة P التي تقع على محيط القرص.

الجواب: $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\pi}\,\mathbf{I} + 1.2\,\pi\,\mathbf{j}$ m/sec , $\boldsymbol{A} = 2\,\pi^2(-2.4\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} - 5\,\mathbf{k})$ m/sec^2



(الشكل-7-35)

مسألة - 18

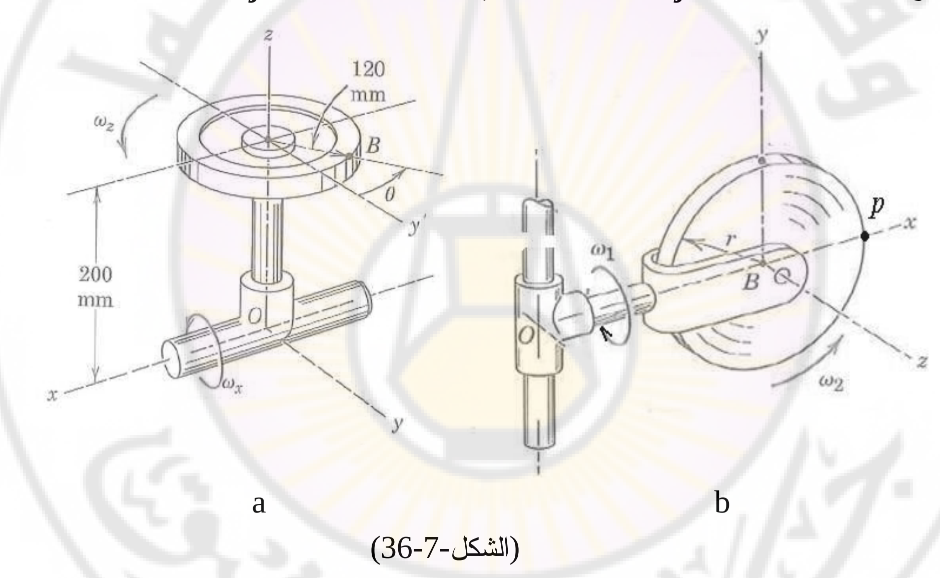
يدور قرص دائري حول محوره الأفقي z المار من المركز C بسرعة زاوية منتظمة تساوي ($\omega_2 = 10$ rad/sec) في الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة، وفي الوقت ذاته تدور المجموعة بأكملها حول المحور x_0 بسرعة زاوية منتظمة ($\omega_1 = 4$ rad/sec) في الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة. المطلوب للوضع المبين في (الشكل-7-35b) إيجاد السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للقرص.

الجواب: $\omega = 4\,\boldsymbol{i} + 10\,\boldsymbol{k}$ rad/sec , $\boldsymbol{\varepsilon} = -40\,\boldsymbol{j}$ rad/sec^2

مسألة - 19

يدور قرص دائري حول محوره z بسرعة زاوية منتظمة تساوي ($\omega_z = 20$ rad/sec) في الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة، وفي الوقت ذاته تدور المجموعة بأكملها حول المحور الثابت x بسرعة زاوية منتظمة ($\omega_x = 10$ rad/sec) في الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة أيضاً. المطلوب للوضع المبين في (الشكل-7-36b) الموافق في اللحظة التي تكون فيها المجموعة في الوضع ($\theta = 30^o$) إيجاد السرعة الخطية والتسارع الخطي للنقطة B .

الجواب: $\boldsymbol{V} = -2.08\,\boldsymbol{i} - 3.2\,\boldsymbol{j} + 1.04\,\boldsymbol{k}$ m/sec , $\boldsymbol{A} = 24\,\boldsymbol{i} - 52\,\boldsymbol{j} - 44\,\boldsymbol{k}$ m/sec^2



a b

(الشكل-7-36)

مسألة - 20

قرص دائري نصف قطره ($r = 75$ mm) يدور دوراناً منتظماً حول المحور z وبسرعة زاوية ($\omega_2 = 4$ rad/sec)، وفي الوقت ذاته تدور المجموعة كلها حول المحور x بسرعة زاوية منتظمة مقدارها ($\omega_1 = 5$ rad/sec). المطلوب للوضع المبين في (الشكل-7-36b) إيجاد:

1. أوجد السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للقرص.
2. أوجد السرعة الخطية والتسارع الخطي للنقطة P .

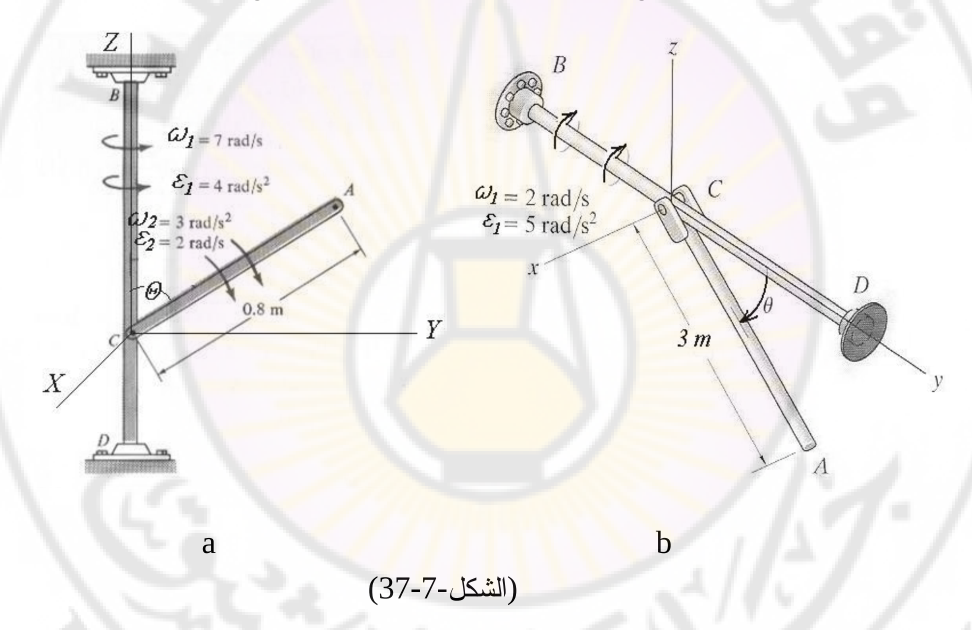
الجواب: $\boldsymbol{\omega} = 5\,\boldsymbol{i} + 4\,\mathbf{k}$ rad/sec , $\boldsymbol{\varepsilon} = -20\,\mathbf{j}$ rad/sec^2

$\boldsymbol{V} = -0.3\,\mathbf{j}$ m/sec , $\boldsymbol{A} = -1.2\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{k}$ m/sec^2

ة لسأم - 21

يدور العمود BD حول المحور الرأسي بسرعة زاوية (ω_1 = 7 rad/sec) وبتسارع زاوي (ε_1 = 4 rad/sec^2)، وفي الوقت ذاته يدور الذراع AC بسرعة زاوية (ω_2 = 2 rad/sec) وبتسارع زاوي (ε_2= 3 rad/sec^2) وفق الاتجاهات المبينة. المطلوب للوضع المبين في (الشكل-7-37b) الموافق في اللحظة التي تكون فيها المجموعة في الوضع (θ = 60°) إيجاد السرعة الخطية والتسارع الخطي للنقطة A .

الجواب: $\boldsymbol{V}$ = - 4.85 $\boldsymbol{i}$ + 0.8 $\boldsymbol{j}$ - 1.39 $\boldsymbol{k}$ m/sec , $\boldsymbol{A}$ = - 1.58 $\boldsymbol{j}$ - 3.67 $\boldsymbol{k}$ m/sec^2



(الشكل-7-37)

مسألة - 22

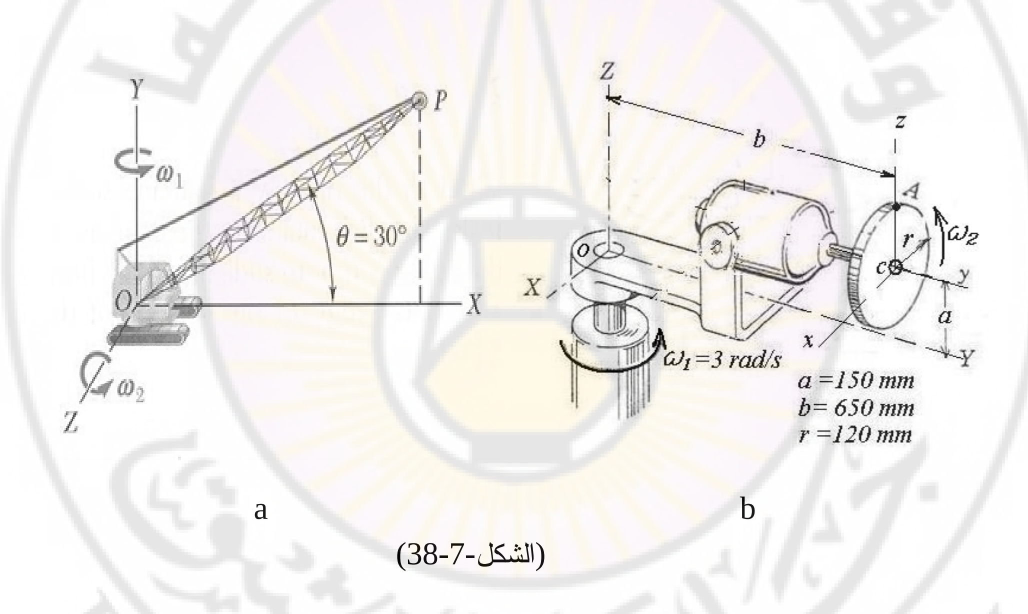
يدور العمود BD حول المحور y بسرعة زاوية (ω_1 = 2 rad/sec) وبتسارع زاوي (ε_1 = 5 rad/sec^2)، وفي الوقت ذاته يدور الذراع AC باتجاه الأسفل بسرعة زاوية (ω_2 = 2 rad/sec) وبتسارع زاوي (ε_2 = 8 rad/sec^2). المطلوب للوضع المبين في (الشكل-7-37b) الموافق في اللحظة التي تكون فيها المجموعة في الوضع (θ = 60^o) إيجاد السرعة الخطية والتسارع الخطي للنقطة A .

الجواب: $\boldsymbol{V}$ = 5.2 $\boldsymbol{i}$ - 5.2 $\boldsymbol{j}$ – 3 $\boldsymbol{k}$ m/s , $\boldsymbol{A}$ = 25 $\boldsymbol{i}$ - 26.8 $\boldsymbol{j}$ + 8.78 $\boldsymbol{k}$ m/s^2

مسألة - 23

يدور ذراع الرافعة OP وطوله يساوي 12 m حول المحور الرأسي Y بسرعة ثابتة ($\omega_1 = 0.3$ rad/sec) في الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة، وفي الوقت ذاته يتم رفع الذراع للأعلى بسرعة ثابتة ($\omega_2 = 0.5$ rad/sec). المطلوب للوضع المبين في (الشكل-7-38b) الموافق في اللحظة التي تكون فيها المجموعة في الوضع ($\theta = 30^o$) إيجاد السرعة الخطية والتسارع الخطي لنهاية الذراع P .

الجواب: $\boldsymbol{V} = -3\,\boldsymbol{i} + 5.2\,\boldsymbol{j} - 3.12\,\boldsymbol{k}$ m/sec , $\boldsymbol{A} = -3.54\,\boldsymbol{i} - 1.5\,\boldsymbol{j} + 1.8\,\boldsymbol{k}$ m/sec^2



a b

(الشكل-7-38)

مسألة -7-24

يقوم محرك كهربائي مثبت على قاعدة أفقية بتدوير قرص دائري بعكس عقارب الساعة وبسرعة زاوية ثابتة ($\omega_2 = 8$ rad/sec)، وتدور في الوقت ذاته المجموعة كلها حول المحور الثابت Z بسرعة زاوية منتظمة مقدارها ($\omega_1 = 3$ rad/sec). المطلوب للوضع المبين في (الشكل7-38b) إيجاد السرعة الخطية والتسارع الخطي للنقطة A الواقعة على محيط القرص.

الجواب: $\boldsymbol{V} = -0.99\,\boldsymbol{i}$ m/sec ; $\boldsymbol{A} = -0.09\,\boldsymbol{j} - 7.68\,\boldsymbol{k}$ m/sec^2

References المراجع العلمية

Alais, Pierre - *Mécanique* (*Cinématique* - *Dynamique*)
Second Edition - 1969 - *Librairie Armand Colin*

Beer / Johnston - *Vector Mechanics for Engineers* - *Dynamics*
Second Edition - 1990 – *McGraw .Kogakusha.*

Giet, A. - *Problémes de Mécanique*
Dunod - 1965 - *Paris*

Hibbeler, R.C. - *Statics & Dynamics*
Eleventh Edition – 2007
Published by Pearson Prentice Hall.

Mc Lean / Nelson - *Engineering Mechanics*
Statics and Dynamics
Fourth Edition - 1988
Shum's Outline Series in Engineering
McGraw-Hill Book Company

Meriam, J.L. - *Dynamics*
Third Edition - 1993 - *John Wiley & Sons,Inc.*

Murray R.Spiegel - *Theoretical Mechanics*
1967 - *Shum's Outline Series in Science*
McGraw - Hill Book Company

س. تارج – الميكانيكا - النظرية
ترجمة الدكتور أحمد صادق القرماني
الطبعة الخامسة - 1986
دار مير للطباعة والنشر – الاتحاد السوفييتي – موسكو

ا.ف. ميشيرسكي - مسائل في الميكانيكا النظرية
ترجمة الدكتور محمد نبيل اسماعيل
الطبعة الأولى - 1977
دار مير للطباعة والنشر – الاتحاد السوفييتي – موسكو

تيموشنكو س – د.ه .يونغ – ميكانيك الهندسة – علم التحريك
ترجمة: وجيه القدسي – عبد الرزاق قدورة – الوليد ملحس
مطابع الشركة العربية – 1967

د. مطانس شحادة زلمة – الميكانيك الهندسي – الحركة والتحريك
منشورات جامعة حلب – 1981
مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

وجيه القدسي – موجز الميكانيك
الطبعة الثانية – 1962
مطبعة جامعة دمشق

ج. ل. ميريام - الميكانيكا الهندسية - الديناميكا
ترجمة: ف. أ. ر. الصالحي – م. فوزي حمد – صالح العذل
دار جون وايلي وأبنائه – 1982

A

Abscissa	فاصلة
Absolute	مطلق ، أساسي
Accelerated	متسرع
Acceleration	تسارع
Accuracy	دقّة
Act (to)	يفعل
Action	فعل
Active	فعّال ، فاعل
Actual	فعلي ، حقيقي ، واقعي
Addition	جمع
Additional	إضافي
Adjacent	مجاور ، مقارب
Air	هواء
Altitude	ارتفاع
Amplitude	سعة
Analysis	تحليل
Angle	زاوية
Angular	زاوي
Application	تطبيق
Apply (to)	يطبق
Approach (to)	يقترب
Arbitrary	اختياري
Arc	قوس
Arm	ذراع
Arrow	سهم

Assume (to)	يفترض
Assumption	افتراض
Asymptote	خط مقارب
Atmosphere	جو ، وحدة ضغط
Atmospheric	جوي
Attract (to)	يجذب
Attraction	جذب ، جاذبية
Average	وسطي
Axiom	بديهية
Axis	محور
Axle	محور دولاب

B

Balance	ميزان
Balancing	موازنة
Balance (to)	وازن
Ballistic	قذائفي
Balloon	منطاد
Bar	قضيب
Barrel	سبطانة
Base	قاعدة
Basis	أساس ، أصل
Beam	جائز ، عارضة معدنية
Bearings	حوامل
Belt	قشاط ، سير ، حزام
Bend (to)	يخضع ، ينحني
Bending	انحناء ، التواء، انعطاف
Blade	شفرة ، ريشة المروحة

Block	بكرة ، كتلة
Body	جسم ، كتلة
Bottom	قاع ، قعر
Brake	مكبح ، فرملة
Brake (to)	يكبح ، يفرمل
Breech	مغلاق
Bridge	جسر
Building	مبنى
Bullet	رصاصة
Buoyancy	عوم

C

Cable	كبل
Calculate (to)	يحسب
Calculation	حساب
Case	حالة ، صندوق
Centroid	مركز متوسط
Chord	وتر
Circular	دائري
Circumference	محيط
Clockwise	اتجاه دوران عقارب الساعة
Clutch	قبضة ، القابض
Coincide (to)	يتطابق ، يتوافق
Coincidence	تطابق ، توافق
Comparison	مقارنة
Compare (to)	يقارن
Component	مركبة
Compound	مركب

Compression	ضغط ، انضغاط
Conclude (to)	يستنتج
Conclusion	نتيجة ، استنتاج
Concurrent	متلاقي ، منسجم
Condition	شرط
Cone	مخروط
Conical	مخروطي
Connecting rod	قضيب وصل ، ذراع التوصيل
Conservation	حفظ
Consider (to)	يعدّ
Consideration	اعتبار
Constant	ثابت
Constrain (to)	يقيد
Constraint	تقييد
Contact	تماس
Contiguous	متلاصق
Continual	مستمر ، متواصل
Contour	حلقة
Coordinate	إحداثي
Coplanar	واقع في مستو واحد
Counterclockwise	عكس اتجاه دوران عقارب الساعة
Counterweight	وزن معدل
Couple	مزدوجة
Coupling	أداة ربط ، اقتران
Crane	رافعة
Crank	مرفق
Crankpin	مسمار المرفق

Crankshaft	العمود المرفقي
Cross section	مقطع عرضاني
Cube	مكعب
Curve	منحنٍ ، ينحني
Cycle	دورة ، حلقة
Cyclical	دوري ، حلقي
Cylinder	أسطوانة
Cylindrical	أسطواني

D

Damp	أخمد
Damping	إخماد ، تخامد
Data	معطيات ، معلومات
Decomposition	تحليل ، انحلال
Define (to)	يحدد ، يعين ، يوضح
Definite	محدّد ، معرّف ، واضح
Deformation	تشوه
Degree of freedom	درجة الحرية ، درجة الطلاقة
Denominator	مخرج الكسر ، مقام الكسر
Density	كثافة
Depend (to)	يعتمد
Derivation	اشتقاق ، استنتاج
Derivative	مشتق
Design	تصميم
Design (to)	يصمم
Detect (to)	يكشف
Determination	تعيين
Determine (to)	يعيّن

Deviate (to)	ينحرف
Deviation	انحراف
Device	أداة ، جهاز
Diagonal	قطري
Diagram	مخطط
Diameter	قطر
Differential (a)	تفاضلي
Differential (n)	تفاضل
Digit	رقم
Dimension	بعد
Direction	اتجاه ، جهة
Directly	مباشرة
Discuss (to)	يناقش
Discussion	مناقشة
Disturbance	اضطراب
Disk	قرص
Displacement	انتقال
Distance	مسافة
Distribute (to)	يوزع
Distribution	توزيع
Disturb (to)	يولد اضطراباً
Disturbance	اضطراب
Divide	يقسم
Division	تقسيم
Dot	نقطة
Dotted	منقط
Drive	قاد ، قيادة ، دفع

Drum	برميل
Dynamic	تحريكي ، فعال
Dynamical	تحريكي ، فعال
Dynamics	علم التحريك
Dynamometer	مقياس القوة
Dyne	دينة

E

Earth	أرض
Eccentric	لامركزي
Eccentricity	لامركزية
Edge	حافة ، حد
Effect	أثر
Efficiency	مردود ، كفاية
Elastic	مرن
Electric	كهربائي
Electrical	كهربائي
Electricity	كهرباء
Element	عنصر
Elementary	عنصري ، أولي
Ellipse	قطع ناقص
Elevation	ارتفاع
Elevator	مصعد
Elongation	استطالة
Emphasis	تشديد ، تأكيد
Emphasize (to)	يشدد، يؤكد
Energy	طاقة ، مقدرة
Engineering	هندسة

Equal	مساو
Equality	مساواة
Equation	معادلة
Equilateral	متساوي الأضلاع
Equilibrium	توازن
Error	خطأ
Establish (*to*)	يبرهن ، يثبت
Equivalent	مكافئ
Example	مثال
Expand (*to*)	يتمدد ، يتسع
Expansion	تمدد
Experiment	تجربة ، اختبار
Exponent	الأس
Exponential	أسيّ
Express (*to*)	يعبر
Expression	عبارة
Extension	امتداد ، اتساع
External	خارجي
Extreme	أقصى

F

Factor	عامل
Failure	انكسار
Figure	شكل
Finite	محدود
Flexibility	ليونة
Flexible	ليّن
Float (*to*)	يطفو

Fluid	سائل
Flywheel	دولاب معدل ، حذافة
Foot	قدم
Force	قوة
Forced	قسري
Formula	صيغة
Foundation	أساس
Frame	إطار
Free	حر
Frequency	تردد
Friction	احتكاك
Frictionless	عديم الاحتكاك
Function	تابع
Fundamental	أساسي ، رئيسي

G

Gas	غاز
Gear	مسنن
General	عام
Generator	مولد
Geometric	هندسي
Geometry	هندسة
Gram	غرام
Graph	مخطط
Graphically	تخطيطياً
Gravitation	الجاذبية ، الثقالة
Gravity	الجاذبية ، الثقالة
Gross	إجمالي

Guide	دليل
Guide (to)	يرشد
Gun	مدفع ، بندقية
Gyration	دوران
Gyroscope	كاشف التدوير (الجيروسكوب)

H

Hammer	مطرقة
Hang (to)	يتدلى ، يعلق
Harmonic	توافقي
Height	ارتفاع
Heterogeneity	لا تجانس
Heterogeneous	لا متجانس ، متغير الخواص
Hinge (n)	مفصل
Hinge (to)	يتمفصل
Hollow	أجوف ، ثقب
Homogeneity	تجانس
Homogeneous	متجانس
Hook	خطّاف
Horizon	أفق
Horizontal	أفقي
Hyperbola	قطع زائد
Hyperbolic	زائدي
Hypothesis	افتراض ، فرضية

I

Ideal	مثالي
Identical	مطابق
Identity	مطابقة

Impact	صدم
Impulse	دفع
Impulsive	دفعي
Inch	بوصة
Inclined	مائل
Increase	ازدياد
Increase (to)	يزداد
Increment	تزايد
Indefinite	غير محدد
Independent	مستقل
Indeterminate	غير محدد
Index	دليل ، فهرست
Indicator	مؤشر
Individual	فردي
Inequality	متراجحة ، تفاوت
Inert	عاطل ، غير فعال
Inertia	عطالة
Inextensible	غير قبل للتمدد
Infinity	لانهاية
Initial	بدئي ، ابتدائي ، أولي
Inelastic	غير مرن
Instant	لحظة
Instantaneous	لحظي
Instrument	آلة ، أداة
Integer	عدد صحيح
Integral	تكامل
Integrate (to)	يكامل

Integration	تكامل
Intensity	شدّة
Internal	داخلي
Intersect (to)	يتقاطع
Intersection	تقاطع
Interval	مجال
Introduction	مقدمة
Inverse	مقلوب
Inversely	عكساً ، عكسياً
Isosceles	متساوي الساقين

J , K

Joint	وصلة
Kinematics	علم الحركة
Kinetic	حركي
Kinetics	علم التحريك

L

Lateral	جانبي
Latitude	خط العرض
Law	قانون
Length	طول
Level (a)	سوي
Level (n)	سوية ، منسوب
Lever	رافعة
Limit	نهاية
Line	خط فاصل ، سلك ، حبل
Line of action	خط الفعل
Linear	خطي ، طولي

Load	حمل ، ثقل
Locomotive	قاطرة
Logarithm	لوغاريتم
Long	طويل
Longitude	خط الطول
Longitudinal	طولاني

M

Machine	آلة
Magnet	مغناطيس
Magnetic	مغناطيسي
Magnification	تكبير
Magnitude	مقدار
Mandatory	إلزامي
Mass	كتلة
Material	مواد
Matter	مادة
Maximum	أعظم
Mean	أوسط ، متوسط
Measure	يقيس
Measurement	قياس
Mechanics	علم الميكانيك
Medium	شيء متوسط ، بيئة
Meter	وحدة الطول في النظام المتري
Method	طريقة
Middle	أوسط
Millimeter	ميلي متر
Minimum	أصغر

Minus	علامة ناقص ، سلبي
Model	نموذج
Modulus	معامل
Moment	عزم
Motion	حركة
Mount (to)	يرتفع ، يصعد
Move (to)	يحرّك
Multiply (to)	يضرب ، يضاعف
Multiplication	ضرب ، مضاعفة ، جداء
Mutual	متبادل
Muzzle	فوهة

N

Natural	طبيعي
Nature	طبيعة
Negative	سالب
Neglect	يهمل
Negligible	مهمل
Net	صاف
Nodal	عقدي
Node	عقدة
Normal	ناظمي
Notation	مجموعة رموز
Note	ملاحظة
Note	يدون
Number	عدد
Numerator	صورة الكسر ، بسط الكسر
Numerical	عددي

O

Observation	مشاهدة
Observe	يشاهد
Observer	مشاهد
Obsolete	مهمل
Obvious	واضح
Obviously	بوضوح
Occupy	يحتلْ
Odd	مفرد
Opposite	معاكس
Order	مرتبة
Ordinate	ترتيب
Origin	مبدأ
Oscillation	تذبذب
Oscillator	مذبذب
Ounce	أونس ، وحدة وزن

P

Pan	كفة
Parabola	قطع مكافئ
Parabolic	مكافئي
Parallel	مواز
Parallelepiped	متوازي سطوح
Parallelogram	متوازي الأضلاع
Particle	جسيم ،جزيئة
Path	مسار
Peg	وتد
Pendulum	نواس

Perceptible	محسوس
Perimeter	محيط
Period	دور ، فترة الاهتزاز
Periodic	دوري
Perpendicular (a)	عمودي ، متعامد
Phase	طور
Physical	فيزيائي
physics	فيزياء
pin	مسمار
Pin (to)	يسمّر
Piston	مكبس
pitch	خطوة
plane	مستوى
planet	كوكب سيار
Plate	لوح
Platform	منصة
Plus	زائد ، موجب
Point	نقطة
pointer	مؤشر
polar	قطبي
pole	قطب
Polygon	مضلّع
Portion	جزء
Position	موضع
Positive	موجب ، إيجابي
Postulate (to)	يفترض
Postulate (n)	المبدأ الأساسي

Potential (a)	كامن
Pound	رطل
Practical	عملي
Process (to)	يتابع ، يتقدم
Precession	مبادرة ، تقدم
Press (to)	يضغط ، يكبس
Press	مكبس
pressure	ضغط
Principle	مبدأ
Prism	موشور
Prismatic	موشوري
Problem	مسألة
Produce	يولد
Product	جداء ، حاصل ضرب
Project	يسقط
Projection	مسقط
Propeller	مروحة
Proportional	متناسب
Proof	برهان
Prove	يبرهن
Pull	يشد
pulley	بكرة
Pulsating	يتذبذب ، ينبض

Q

Quadrant	ربع
Quadratic	تربيعي
Quantity	كمية

R

Radial	قطري
Radian	راديان ، زاوية نصف قطرية
Radius	نصف قطر
Rail	سكة
Range	مجال
Rate	معدل
Ratio	نسبة
React	يقاوم
Reaction	رد الفعل
Reactive	ردّي ، رجعي
Rectangle	مستطيل
Rectangular	قائم
Rectilinear	مستقيم
Reduce	يختزل
Reduction	اختزال
Reference	مقارنة ، مراجعة
Relation	علاقة
Relative	نسبي
Represent	يمثّل
Representation	تمثيل
Replace	يستبدل
Resistance	مقاومة
Resolution	تحليل ، تمييز
Resolve	يحل
Resonance	طنين
Rest	سكون

Restore	يعيد ، يرجع
Revolve	يدور
Rigid	صلد ، صلب
Rim	حافة
Ring	حلقة
Rivet	تبشيم
Roll	تدحرج
Roller	متدحرج ، دحروج
Root	جذر ، مصدر
Rope	حبل
Rotate	يدور
Rotation	دوران
Rotor	دوّار

S

Scalar	سلمي ، عددي
Scale	مقياس
Screw	لولب
Section	مقطع
Series	سلسلة
Slide	انزلاق
Slip	ينزلق
Slope	ميل
Slope	منحدر
Speed	سرعة
Sphere	كرة
Square	مربع
Spring	نابض

Static	ساكن
Step	خطوة
Straight	مستقيم
Strain	انفعال
Strength	قوة ، مقاومة
Stress	إجهاد
Support	استناد
Swing	تأرجح
Symmetry	تناظر ، تماثل

T

Tachometer	مقياس السرعة
Tangent	مماس
Tangential	مماسي
Tension	شدّ
Theorem	نظرية
Tie bar	قضيب ربط
Torque	عزم
Translation	انسحاب
Transmission	نقل
Transmit	ينقل
Transversal	عرضاني
Twist	فتل

U

Unbalance	اختلال الاتزان
Uniform	منتظم
Unit	وحدة
Unstable	غير مستقر

V

Variable	متغير
Variation	تغير
Vector	شعاع ، متجه
Velocity	سرعة
Vertex	ذروة
Vibration	اهتزاز
Vertical	شاقولي
Vibrator	هزاز
Virtual	افتراضي
Viscous	لزج
Volume	حجم

W , Z

Wave	موجة
Wedge	إسفين
Weight	وزن
Wheel	دولاب
Wide	عريض
Width	عرض
Wind	يلف
Wire	سلك
Zero	صفر

List of Symbols		جدول الرموز
$\boldsymbol{A}$	*Acceleration Vector*	التسارع الخطي
A_{av}	*Average Acceleration*	التسارع الوسطي
$\boldsymbol{A}_a$	*Absolute Acceleration*	التسارع المطلق
$\boldsymbol{A}_c$	*Coriolis Acceleration*	تسارع كوريوليس
$\boldsymbol{A}_e$	*Transport Acceleration*	التسارع المكتسب
$\boldsymbol{A}_r$	*Relative Acceleration*	التسارع النسبي
$\boldsymbol{A}_{B/A}$, $\boldsymbol{A}_{BA}$	*Relative Acceleration of* B *with Respect to* A	التسارع النسبي للنقطة B بالنسبة للنقطة A
A , B , C,..	*Points*	نقاط
$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$,……	*Constant Vector*	متجه ثابت
$\boldsymbol{b}$	*Unitary Vector for Binormal Direction - Binormal Direction*	المتجه الواحدي للناظم الثانوي اتجاه الناظم الثانوي
a	*Amplitude* *Semi major axis of ellipse*	سعة الاهتزاز نصف المحور الكبير لقطع ناقص
b	*Semi major axis of ellipse*	نصف المحور الصغير لقطع ناقص
C	*Path – Centroidal*	مسار – المركز المتوسط
c_1 , c_2 ,….	*Constants*	ثوابت
D , d	*Diameter*	قطر الدائرة
a , b , c , d	*Distance*	مسافة
e	*Base of natural logarithms*	أساس اللوغاريتم الطبيعي
f_r	*Frequency*	تردد الاهتزاز
f	*Function*	تابع
H - h	*Height*	ارتفاع
I	*Instantaneous Center of Rotation*	المركز الآني للدوران
$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$	*Unitary Vector for Axis* X,Y,Z	المتجه الواحدي للمحاور الإحداثية
k	*Proportion Factor*	عامل تناسب
L , l	*Length*	طول
M	*Particle*	جسيم مادي

$\boldsymbol{n}$	*Unitary Vector for Principal Normal Direction* *Principal Normal Direction*	المتجه الواحدي للناظم الرئيسي اتجاه الناظم الرئيسي
n	*Number of Revolution per Minute*	عدد الدورات في الدقيقة
O	*Origin of Coordinates*	مبدأ الإحداثيات - قطب
p	*Circular Frequency of the Vibration*	التردد الدائري للاهتزاز
R , r	*Radius*	نصف القطر
$\boldsymbol{r}$	*Position Vector*	متجه الموضع
$\boldsymbol{s}$	*Distance - Length of Arc* *Curved Coordinate*	المسافة – طول القوس – الفاصلة المنحنية
T	*Period of the Oscillations of a Pendulum - Frame of Reference*	دور الحركة النوسية جملة إحداثية
t	*Time*	زمن
$\boldsymbol{V}$	*Velocity Vector*	متجة السرعة
$\boldsymbol{V}_a$	*Absolute velocity*	السرعة المطلقة
$\boldsymbol{V}_e$	*Transport Velocity*	السرعة المكتسبة
$\boldsymbol{V}_r$	*Relative Velocity*	السرعة النسبية
V_0	*Initial Velocity*	السرعة الابتدائية
V_{av}	*Average velocity*	السرعة الوسطية
V_{lim}	*Limit velocity*	السرعة الحدية
$\boldsymbol{V}_{B/A}$, $\boldsymbol{V}_{BA}$	*Relative Velocity of* B *with Respect to* A	السرعة النسبية للنقطة B بالنسبة للنقطة A
X , Y , Z	*Rectangular Cartesian*	جملة محاور إحداثية
x , y , z	*Rectangular Cartesian Coordinates - Distance*	الإحداثيات الديكارتية القائمة المسافة
x_0 , y_0 , z_0	*Initial Cartesian Coordinates*	الإحداثيات الديكارتية الابتدائية
$\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$	*First Time derivative of Coordinates* x , y , z	المشتق الأول للإحداثيات الديكارتية
$\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$	*Second Time Derivative of Coordinates* x , y , z	المشتق الثاني للإحداثيات الديكارتية
$\boldsymbol{u}$	*Unitary Vector of Axe*	متجه واحدي لمحور
θ	*Angular Coordinate*	إحداثي زاوي
Φ_0	*Initial Phase Angle*	زاوية الطور الابتدائية
φ	*Phase Angle*	زاوية الطور

$\alpha ,\beta ,\gamma ,\theta ,\varphi$	*Angles*	زوايا
Δ	*Interval*	تغير
ρ	*Radius of Curvature*	نصف قطر الانحناء
$\boldsymbol{\tau}$	*Unitary Vector for Tangential Direction - Tangential Direction*	المتجه الواحدي للمماس اتجاه المماس
τ	*Period - Periodic Time*	الدور – الزمن الدوري
$\boldsymbol{\Omega}$	*Angular Velocity Vector*	متجه السرعة الزاوية
ω	*Angular Velocity*	السرعة الزاوية
ω_r	*Relative Angular Velocity*	السرعة الزاوية النسبية
ω_e	*Transport Angular Velocity*	السرعة الزاوية المكتسبة
E	*Angular Acceleration Vector*	متجه التسارع الزاوي
ε	*Angular Acceleration*	التسارع الزاوي

الوحدات الأساسية للنظام العالمي المستخدمة في الميكانيك

Principal SI Units Used in Mechanics

Formula الصيغة	*Unit* الوحدة	*Quantity*	الكمية
rad	*Radian*	*Angle*	الزاوية
rad /s^2	*Radian per second squared*	*Angular Acceleration*	التسارع الزاوي
rad /s	*Radian per second*	*Angular Velocity*	السرعة الزاوية
m	*Meter*	*Distance*	المسافة
sec	*Second*	*Time*	الزمن
m /s^2	*Meter per second squared*	*Linear Acceleration*	التسارع الخطي
m /s	*Meter per second*	*Linear Velocity*	السرعة الخطية